Б. Г. ЗИВ
В. М. МЕЙЛЕР

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

8 сыйныф

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР 8

Б. Г. ЗИВ
В. М. МЕЙЛЕР

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

Татар урта гомуми белем бирү мәктәбенең
8 нче сыйныфы өчен

Казан • «Мәгариф»
Москва • «Просвещение»
2003

УДК 373.167.1 : 514*08
ББК 74.262.21
З-47

Зив Б. Г., Мейлер В. М.

Дидактические материалы по геометрии для 8 класса.— М.: Просвещение, 2000.

Охраняется Законом РФ «Об авторском праве и смежных правах». Воспроизведение всей книги или ее части на любых видах носителей запрещается без письменного разрешения издательства.

Переводное издание учебника выпущено в свет по Лицензионному договору 3/7 от 01.04.2002 г. Экземпляры переводного издания подлежат распространению исключительно на территории Республики Татарстан, а также среди татарской диаспоры на территориях других субъектов Российской Федерации.

Зив Б. Г., Мейлер В. М.

З-47 Геометриядән дидактик материаллар: Татар урта гомуми белем бирү мәкт. 8 нче с-фы өчен /Русчадан Э. Р. Гыйльманова тәрж.— Казан: Мәгариф, 2003.— 143 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-1028-9

Әлеге ярдәмлектә мөстәкыйль һәм контроль эш күнегүләре, шулай ук 8 нче сыйныф геометрия курсы буенча математик диктантлар бирелә. Бу китап Л. С. Атанасян редакциясендәге «Геометрия, 7—9» дәреслегенә кулланма буларак тәкъдим ителә.

БЗ—10(69)—52—2003/2004

ISBN 5-7761-1028-9

© Издательство «Просвещение», 1996
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә,
«Мәгариф» нәшрияты, 2003

КЕРЕШ

Ярдәмлектә 39 мөстәкыйль эш, 7 контроль эш, 5 математик диктант һәм аеруча катлаулы мәсьәләләр бирелгән.

Мөстәкыйль эшләр тиңдәшле номеры һәм М хәрефе белән билгеләнгән. Мәсәлән, М—2 — икенче мөстәкыйль эш. Тәкъдим ителгән мөстәкыйль эшләрнең максаты — укучыларның индивидуаль үзенчәлекләрен һәм хәзерлек дәрәҗәләрен исәпкә алып, аларның эшчәнлекләрен мәсьәләләр чишүгә юнәлтүдә ярдәм итү. Моннан тыш мөстәкыйль эшләрне көндәлек тикшерү өчен файдаланырга мөмкин.

Мөстәкыйль эшләр сигез вариантта бирелгән.

Һәр эшнең беренче һәм икенче вариант мәсьәләләрен чишү өчен, укучылар минималь программа таләпләре дәрәҗәсендәге белемне кулланырга тиеш.

Өченче һәм дүртенче вариантлар уртача катлаулылыктагы мәсьәләләрдән тора. Бу мәсьәләләрне чишү өчен, стандарт ситуацияләрдәге төшенчәләрне танып белергә, стандарт яки аннан беразга гына аерылган шартларда белемнәрне куллана белергә кирәк. Өченче һәм дүртенче вариант мәсьәләләре катлаулылыгы буенча дәреслектәге күпчелек мәсьәләләргә охшаш.

Бишенче һәм алтынчы вариантлар яхшырак әзерлекле укучылар өчен бирелә. Бу варианттагы мәсьәләләрне чишү катлаулы ситуацияләрдә белемнәрне куллана белү, җитәрлек югары дәрәҗәдә хисаплау күнекмәләре һәм бердәй рәвеш үзгәртү күнекмәләре булдыруны таләп итә.

Бу мәсьәләләр катлаулылыгы буенча дәреслекнең авыррак типтагы һәм өстәмә мәсьәләләренә якынча туры килә.

Җиденче һәм сигезенче вариант мәсьәләләрен чишкәндә белемне иҗади куллана белү таләп ителә. Монда стандарт булмаган катлаулы геометрик ситуацияләрне анализларга, мөстәкыйль рәвештә яңа фактлар ачарга, алар арасындагы нисбәтләрне ачыкларга туры килә. Катлаулылыклары буенча бу мәсьәләләр дәреслекнең «аеруча катлаулы мәсьәләләр» бүлегенә туры килә.

Җиденче һәм сигезенче вариант мәсьәләләрен укучыларга, сыйныфның барлык укучылары белән төп эшләрен башкарганнан соң, калган вакытта бирергә, мәҗбүри булмаган өй эше өчен, шулай ук факультатив яки математик түгәрәк утырышларында файдаланырга мөмкин.

Ярдәмлектә * тамгасы белән билгеләнгән ике мөстәкыйль эш бирелгән. Бу эшләрнең беренче һәм икенче вариантлары катлаулылык дәрәҗәсе минималь программа таләпләренә караганда бераз авыррак. Аларны яхшырак әзерлекле сыйныфларда үткәрергә тәкъдим ителә.

Ярдәмлектә мөстәкыйль эшләр бик күп. Укытучы укучылар һәр эштәге барлык биремнәрне дә эшләп бетерергә тиеш диган

максат куярга тиеш түгел. Ярдәмлектәге эшләр җыелмасы укытучыга һәр дәрестә дәреснең максатына, вакытына, укучыларның хәзерлек дәрәҗәсенә карап кирәкле биремнәрне сайлап алырга мөмкинлек бирә.

Ярдәмлектәге эшләр вариантлап төзелгән.

Биремнәрнең сигез вариантта булуы, бер китапны һәр укучыга аерым бирерлек итеп, сигез кечкенә китапка бүләргә мөмкинлек бирә.

Контроль эшләр ярдәмлектә тиңдәшле номеры һәм **К** хәрефе белән билгеләнгән. Алар дәреслекнең һәр биш бүлеге һәм бөтен 8 нче сыйныф геометрия курсы буенча белемнәрне йомгаклап тикшерү эшләре үткәрү өчен бирелгән.

Контроль эшләр дүрт вариантта төзелгән. Барлык вариантларның эшләре якынча бер үк катлаулылыкта. Һәр вариантта ° тамгасы белән билгеләнгән ике бирем бар. Бу — минималь программа таләпләре дәрәҗәсендәге мәсьәләләр. Алар эшнең мәҗбүри өлешен тәшкил итәләр.

Киләсе өч бирем укучыларның математик белем үсешен тикшерә. Шул ук вакытта соңгы бирем белемнәрне иҗади куллану, стандарт булмаган геометрик конфигурацияләрне анализлау, җитәрлек дәрәҗәдә катлаулы дедуктив фикер йөртүне таләп итә. Бу бирем * тамгасы белән билгеләнгән.

Һәр эшне үткәргәндә укытучы, укучыларның хәзерлек дәрәҗәсенә һәм эшкә бирелгән вакытка бәйле рәвештә, ° тамгасы белән билгеләнмәгән мәсьәләләрнең кайсын бу эшкә кертүне үзе хәл итә. Мәсәлән, **К—1** контроль эше өчен (45 минутка каралган) биремнәрне түбәндәгечә төзеп була:

— 1°, 2°, 3а яисә 1°, 2°, 3б биремнәре хәзерлек дәрәҗәсе йомшак сыйныфлар өчен;

— 1°, 2°, 3б, яисә 1°, 2°, 3б, 4*, яисә 1°, 2°, 3а, 3б, 4* биремнәре әзерлек дәрәҗәсе көчле сыйныфлар өчен.

Бу вакытта «3» ле билгесен алу өчен, 1° һәм 2° биремнәрен дөрес эшләү җитә. ° тамгасы белән билгеләнмәгән мәсьәләләрне чишү исә, «4» һәм «5» билгеләрен алу өчен яки ике — төп һәм өстәмә билге алу өчен, кирәкле шарт булып тора.

Контроль эшләрне башкача да кулланырга мөмкин.

Математик диктантлар укучыларның теоретик белемнәрен системага салу максаты белән бирелә һәм контроль эш алдыннан үткәрелергә мөмкин. Диктант үткәргәндә укытучы сорау яки мәсьәлә тәкъдим итә, ә укучы берничә минут эчендә аларга җавап бирергә тиеш. Җавап өчен кирәкле вакытны, сорауның катлаулыгына һәм сыйныфның хәзерлегенә карап, укытучы үзе билгели. Мондый эш өчен якынча 35 минут вакыт бирелергә мөмкин, калган вакытта укытучы сыйныф белән укучыларның җавапларын тикшерә, хаталарны күрсәтә.

Ярдәмлек ахырында барлык мөстәкыйль эшләргә, контроль эшләргә җаваплар, шулай ук катлаулырак биремнәргә күрсәтмәләр һәм аларның чишелешләре бирелгән. Күп мәсьәләләрнең ярдәмлектә тәкъдим ителмәгән башка чишелешләре дә бар.

Дәреслек пунктлары буенча мөстәкыйль һәм контроль эшләрнең бүленеше

Мөстә-кыйль эш	Тема	Дәреслек пункты
М—1	Күппочмак, дүртпочмак	39—41
М—2	Параллелограмм һәм аның үзлекләре	42
М—3	Параллелограммның билгеләре	43
М—4	Трапеция	44
М—5	Параллелограмм һәм трапеция төзүгә мәсьәләләр	42—44
М—6	Турыпочмаклык	45
М—7	Ромб һәм квадрат	46
М—8	Турыпочмаклык, ромб, квадрат төзүгә мәсьәләләр	45, 46
М—9	Күппочмаклар, квадрат һәм турыпочмаклык мәйданнарының үзлекләре	48, 50
М—10	Параллелограмм мәйданы	51
М—11	Өчпочмак мәйданы	52
М—12	Трапеция мәйданы	53
М—13	Пифагор теоремасы	54, 55
М—14	Күппочмаклар мәйданы	48—55
М—15	Пропорциональ кисемтәләр	56
М—16	Охшаш өчпочмаклар билгеләмәсе Охшаш өчпочмаклар мәйданнарының чагыштырмасы	57, 58
М—17	Өчпочмаклар охшашлыгының беренче билгесе	59
М—18	Өчпочмаклар охшашлыгының икенче һәм өченче билгеләре	60, 61
М—19	Өчпочмакның урта сызыгы. Өчпочмакның медианалары үзлеге	62
М—20	Турыпочмаклы өчпочмакта пропорциональ кисемтәләр	63
М—21	Охшашлык методы белән чишелә торган төзүгә мәсьәләләр	64
М—22	Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмакның синусы, косинусы, тангенсы һәм аларның 30°, 45°, 60° лы почмаклар өчен кыйммәтләре	66, 67
М—23	Турыпочмаклы өчпочмакларны чишү	66, 67
М—24*	Өчпочмаклар охшашлыгы	56—67
М—25	Туры һәм әйләнәнең үзара урнашуы Әйләнәгә орынма	68, 69
М—26	Камалган почмак турында теорема	71
М—27	Хорда кисемтәләренең тапкырчыгышы турында теорема	71
М—28*	Әйләнә	68—71
М—29	Өчпочмакның дүрт әһәмиятле ноктасы	72, 73
М—30	Камаулы әйләнә	74
М—31	Камаучы әйләнә	75
М—32	Вектор төшенчәсе	76—78
М—33	Векторларны кушу	77—81
М—34	Векторларны алу	82
М—35	Векторны санга тапкырлау	83
М—36	Векторларны мәсьәлә чишкәндә куллану	84
М—37	Трапециянең урта сызыгы	85
М—38	Йомгаклап кабатлау (дүртпочмаклар, мәйданнар, охшаш өчпочмаклар)	
М—39	Йомгаклап кабатлау (әйләнә)	
К—1	Дүртпочмаклар	39—47
К—2	Мәйдан	48—55
К—3	Охшаш өчпочмаклар	56—61
К—4	Охшашлыкны куллану, турыпочмаклы өчпочмакларны чишү	62—67
К—5	Әйләнә	68—75
К—6	Векторлар	76—84
К—7	Йомгаклап кабатлау	85

МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР

1 нче вариант

М—1

1. Кабарынкы $ABCDE$ бишпочмагының B түбәсе калган ике түбәсе белән тигез диагональләр ярдәмендә тоташтырылган. $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$ икәне билгеле булса, $ABDE$ һәм $BEDC$ дүртпочмакларының периметрлары тигез булуын исбатлагыз.
2. Почмаклары тигез булган кабарынкы тугызпочмаклык бирелгән. Бу почмакларны табыгыз.

М—2

1. $ABCD$ дүртпочмагында $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC = 20$ см, $BD = 10$ см, $AB = 13$ см. Дүртпочмакның диагональләре O ноктасында кисешәләр. COD өчпочмагының периметрын табыгыз.
2. Кысынкы почмагы A булган $ABCD$ параллелограммының B түбәсеннән AD турысына BK перпендикуляры төшерелгән; $BK = \frac{1}{2}AB$ булса, C һәм D почмакларын табыгыз.

М—3

1. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. $BC = AD$ булуын исбатлагыз.
2. Диаметры AC булган әйләнәдә BD кисемтәсенең уртасы шул әйләнәнең үзәге булып тора. Шул ук вакытта A, B, C, D нокталары бер туры өстендә ятмыйлар. $\angle ABC = \angle ADC$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. $ABCD$ трапециясендә BC — кечерәк нигез. AD кисемтәсендә, $BE \parallel CD$ булырлык итеп, E ноктасы алынган; $\angle ABE = 70°$, $\angle BEA = 50°$. Трапециянең почмакларын табыгыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең кысынкы почмагы 45° ка тигез. Кечерәк ягы һәм кечерәк нигезе 10 ар см га тигез. Зуррак нигезне табыгыз.

М—5

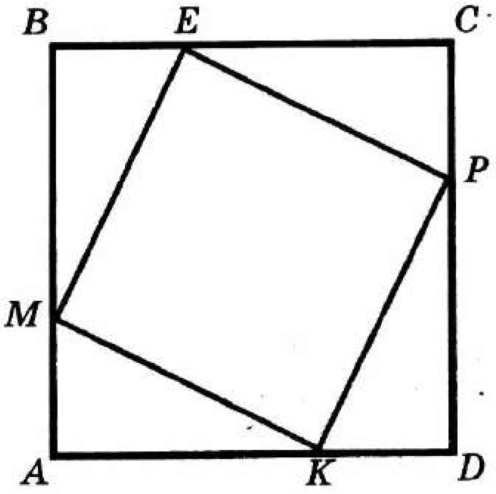
1. Зур ягы, кечкенә диагонале һәм алар арасындагы почмак буенча параллелограмм төзегез.
2. Кечерәк нигезе һәм ян яклары буенча турыпочмаклы трапеция төзегез.

М—6

1. *ABCD* турыпочмаклыгында диагональләр *O* ноктасында кисешәләр. *E* — *AB* ягының уртасы, $\angle BAC = 50°$. *EOD* почмагын табыгыз.
2. *AB* һәм *CD* диаметрлы әйләнә бирелгән. *ACBD* дүртпочмагының турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

М—7

1. *ABCD* ромбында $\angle A = 31°$. Диагональләре *O* ноктасында кисешәләр. *BOC* өчпочмагының почмакларын табыгыз.
2. 1 нче рәсемдә *ABCD* дүртпочмагы — квадрат, $AK = PD = EC = BM$. Кабарынкы *MEPK* дүртпочмагының да квадрат булуын исбатлагыз.



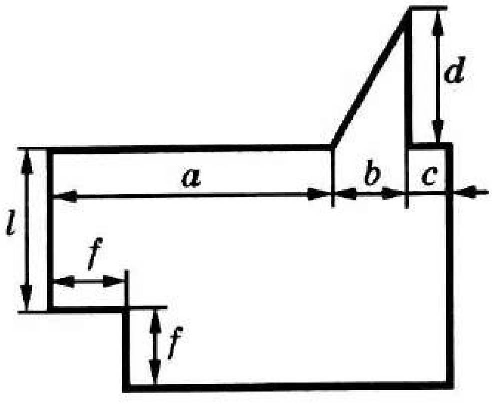
Рәс.1

М—8

1. Ягы һәм периметры буенча турыпочмаклык төзегез.
2. Ниндидер бер квадратның түбәсеннән диагоналенә төшерелгән перпендикулярга тигез булган кисемтә бирелгән. Бу квадратны төзегез.

М—9

1. 2 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураның мәйданын исәпләү өчен формула төзегез.
2. Турыпочмаклыкның периметры 26 см га, ә якларының берсе 9 см га тигез. Мәйданы шул турыпочмаклыкныкы кадәр булган квадратның ягын табыгыз.



Рәс. 2

М—10

1. *ABCD* турыпочмаклыгында *B* почмагы җәенке. *AD* ягының *D* түбәсе ягындагы дәвамында $\angle ECD = 60°$, $\angle CED = 90°$, $AB = 4$ см, $AD = 10$ см булырлык итеп *E* ноктасы билгеләнгән. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
2. *ABCD* параллелограммында *M* һәм *K* нокталары тиңдәшле рәвештә *BC* һәм *AD* ягының урталары. *ABMK* дүртпочмагының мәйданы *ACD* өчпочмагының мәйданына тигез булуын исбатлагыз.

М—11

1. *ABCD* турыпочмаклыгында $BD = 12$ см. *B* түбәсе *AC* турысыннан 4 см ераклыкта ята. *ABC* өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. *ABC* өчпочмагында $\angle C = 135°$, $AC = 6$ дм, *BD* биеклеге 2 дм га тигез. *ABD* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

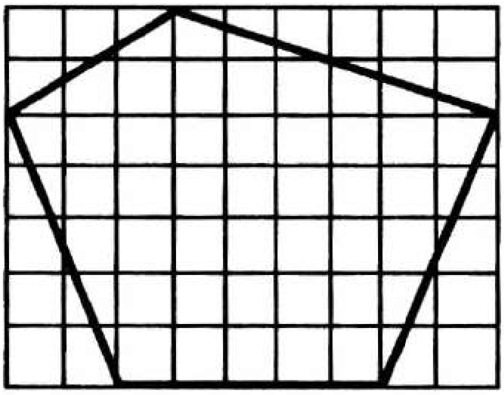
1. Тигезьянлы трапециянең периметры 32 см, ян ягы 5 см, мәйданы 44 см^2. Трапециянең биеклеген табыгыз.
2. *ABCD* трапециясенең *AD* һәм *BC* нигезләре тиңдәшле рәвештә 10 см һәм 8 см. *ACD* өчпочмагының мәйданы 30 см^2 булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы трапециянең зур диагонале 13 см га, ә зуррак нигезе 12 см га тигез. Кечерәк нигезе 8 см га тигез булса, трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Яклары $1, \sqrt{3}, 2$ булган өчпочмакның почмакларын табыгыз.

М—14

1. 3 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураны сызыгыз. Тиешле үлчәүләрне башкарып бу фигураның мәйданын исәпләгез.
2. *ABCD* квадратының 12 см лы *AB* ягында $MC = 13$ см булырлык итеп, *M* ноктасы билгеләнгән. *AMCD* дүртпочмагының мәйданын табыгыз.



Рәс. 3

M—15

1. AB, CD һәм EF, MN кисемтәләре бер-берсенә пропорциональ. Әгәр $AB = 5$ см, $CD = 80$ мм, $MN = 1$ дм булса, EF ны табыгыз.
2. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CD — биссектриса. AB, AD, DB ны табыгыз.

M—16

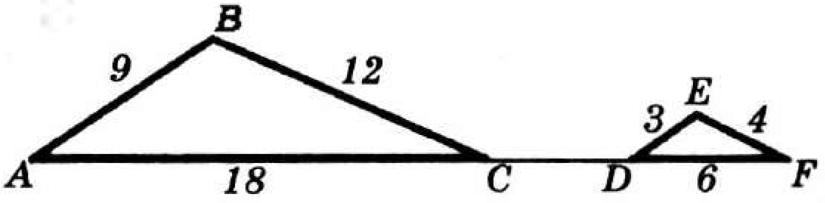
1. ABC һәм DEF өчпочмаклары охшаш. $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, $EF = 14$, $DF = 20$, $BC = 21$. AC ягын табыгыз.
2. Охшаш ике өчпочмакның мәйданнары 16 см^2 һәм 25 см^2. Беренче өчпочмакның якларының берсе 2 см. Икенче өчпочмакта аңа охшаш якны табыгыз.

M—17

1. $ABCD$ параллелограммында A түбәсе аша BC ягын E ноктасында, ә DC ягының дәвамын F ноктасында кисеп үтүче туры бирелгән. $\Delta ABE \backsim \Delta EFC$ булуын исбатлагыз.
2. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\angle B_1 = \angle C$, $\angle B = \angle A_1$, $AC = 2$, $B_1C_1 = 4$, A_1C_1 AB дан 2,2 гә зуррак, $A_1B_1 = 2{,}8$. Өчпочмакның билгесез якларын табыгыз.

M—18

1. AB һәм CD турылары O ноктасында кисешәләр, $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. $\angle CBO = \angle DAO$ булуын исбатлагыз.
2. 4 нче рәсемдә сурәтләнгән өчпочмакларның охшаш булуын исбатлагыз һәм AB, DE турыларының үзара торышын ачыклагыз.



Рәс. 4

M—19

1. $ABCD$ параллелограммының диагональләре O ноктасында кисешәләр. K — AB ягының уртасы, $AK = 3$ см, $KO = 4$ см. Параллелограммның периметрын табыгыз. KOA һәм BCA почмакларын чагыштырыгыз.
2. ABC өчпочмагында $AC = 12$ см. Медианалары кисешү ноктасы аша AC ягына параллель итеп DE турысы үткәрелгән ($D \in AB$, $E \in BC$). DE ны табыгыз.

М—20

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $CD \perp AB$, $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$. ACD һәм CDB өчпочмаклары мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында $BD \perp AB$, $BE \perp AD$, $BE = 6$ см, $AE = 3$ см. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

М—21

1. Бирелгән A һәм C почмаклары һәм AM медианасы буенча ABC өчпочмагын төзегез.
2. Бирелгән кисемтәне $2 : 3 : 5$ чагыштырмасында бүлегез.

М—22

1. Тигезьянлы трапециянең нигезләре 2 һәм 20 гә, ә ян ягы 15 кә тигез. Трапециянең кысынкы почмагының синусын, косинусын һәм тангенсын табыгыз.
2. AB һәм CD — әйләнәнең үзара перпендикуляр булмаган ике диаметры, $DE \perp AB$, $CD = 4$, $DE = \sqrt{3}$. Диаметрлар арасындагы кысынкы почмакны табыгыз.

М—23

1. Параллелограммның яклары a һәм b га, кысынкы почмагы α га тигез. Параллелограммның мәйданын табыгыз. $a = 2{,}3$, $b = 3{,}7$ $\alpha = 40°37'$ булганда, бу мәйданны исәпләгез.
2. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\angle BAC = 45°$, $AB = 10$, $D \in BC$ ($B — D — C$), $\angle DAC = 30°$. DC ны табыгыз.

М—24*

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $AC = 4$, $BC = 6$, $E \in AB$ ($A — E — B$), $EF \perp BC$, $ED \perp AC$; $EF : ED = 1 : 2$. $DEFC$ турыпочмаклыгының мәйданын табыгыз.
2. $ABCD$ ромбында $\angle A = 60°$, ә биеклеге $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. AB ягының B ноктасы ягындагы дәвамында, $BM = 4$ булырлык итеп, M ноктасы алынган. MD кисемтәсе BC ны K ноктасында кисеп үтә. K ноктасы BC кисемтәсен нинди чагыштырмада бүлә?

М—25

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$), $AB = 10$, $\angle ABC = 30°$. Үзәге A ноктасында булган әйләнә үткәрелгән.
   а) Әйләнә BC турысына орынсын;
   б) туры белән уртак нокталары булмасын;
   в) ике уртак ноктасы булсын өчен әйләнәнең радиусы нинди булырга тиеш?
2. Әйләнәгә орынмада, орыну ноктасыннан ике якта, әйләнә үзәгеннән 20 см ераклыкта M һәм T нокталары билгеләнгән. $TM = 32$ см. Әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—26

1. Үзәге O ноктасында булган әйләнәнең AB дугасы $60°$ ка тигез. Әйләнәнең радиусы 6 см га тигез булса, A ноктасыннан OB радиусына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. AB һәм AC — әйләнәнең хордалары. $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. AC дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.

М—27

1. Түгәрәк эчендә урнашкан M ноктасы аша AB һәм CD хордалары үткәрелгән, $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. AB ны табыгыз.
2. AB — әйләнәнең диаметры. C ноктасы әйләнә өстендә ята. $CD \perp AB$, $AD = 3$, $DB = 5$. CD ны табыгыз.

М—28*

1. Ике әйләнәнең үзәкләре уртак. Зуррак әйләнәнең радиусы R га, ә кечерәгенеке r га тигез. Кечерәк әйләнәгә орынучы зуррак әйләнә хордасының озынлыгын табыгыз.
2. Ике әйләнәнең радиуслары тигез, һәм алар A һәм B нокталарында кисешә. A ноктасы аша әйләнәләрнең берсен — C, ә икенчесен D ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. $BC = BD$ икәнен исбатлагыз.

М—29

1. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында $AD \perp BC$, $CF \perp AB$, CF ны AD M ноктасында кисеп үтә. $\angle ABM = \angle MCA$ икәнен исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$), AE — биссектриса, $CE = 5$, $AB = 14$. ABE өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—30

1. Әгәр өчпочмакның ягы $2\sqrt{3}$ см булса, тигезьяклы өчпочмакка камаулы әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Әйләнәне камаучы тигезьянлы трапециянең периметры 10 см. Трапеция ягының озынлыгын табыгыз.

М—31

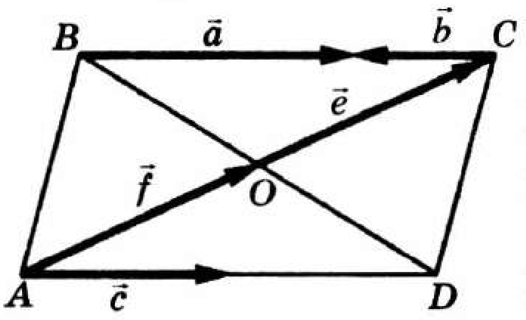
1. Тигезьянлы өчпочмакны камаучы әйләнә радиусы $3\sqrt{3}$ кә тигез. Өчпочмакның периметрын табыгыз.
2. Радиусы 10 га тигез булган әйләнәгә катетларының берсе 16 га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак камалган. Бу өчпочмакның мәйданын табыгыз.

М—32

ABCD — параллелограмм. 5 нче рәсемдә сурәтләнгән:

а) коллинеар;
б) бердәй юнәлешле;
в) капма-каршы юнәлешле;
г) тигез векторлар парын күрсәтегез.

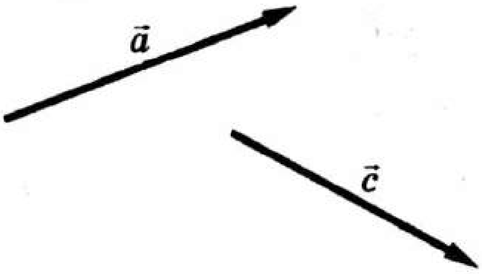
AC турысында, *A* ноктасыннан башлап, $\vec{a}$ га тигез булган вектор салып буламы?



Рәс. 5

М—33

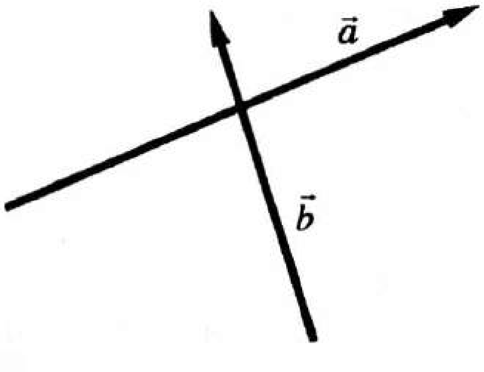
1. 6 нчы рәсемдә $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$ векторлары сурәтләнгән. $\vec{a}+\vec{c}$ векторын 2 ысул белән төзегез.
2. *M, H, P, O, S* — ирекле алынган нокталар. $\overline{MH}+\overline{PO}+\overline{SM}+\overline{HP}+\overline{OS}$ суммасын табыгыз.



Рәс. 6

М—34

1. 7 нче рәсемдә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары сурәтләнгән. $\vec{a}-\vec{b}$ векторын төзегез.
2. *ABC* өчпочмагы бирелгән. $\overline{CB}$ векторын $\overline{AC}$ һәм $\overline{AB}$ векторлары аша күрсәтегез.
3. Тигезьянлы *ABC* өчпочмагында *M* ноктасы — *AC* нигезенең уртасы. Әгәр *AB* = 5 см, *BM* = 4 см булса, $|\overline{MB}-\overline{MC}+\overline{BA}|$ ны табыгыз.



Рәс. 7

M—35

1. Коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ векторын төзегез.
2. $ABCD$ параллелограммында O — диагональләр кисешү ноктасы, K — CD ягының уртасы. $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{AK}$ векторларын $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ һәм $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторлары аша күрсәтегез.

M—36

1. ABC өчпочмагында AA_1 — медиана, M — AA_1 ягының уртасы. $\overrightarrow{BM}$ векторын $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ һәм $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторлары аша күрсәтегез.
2. $ABCD$ дүртпочмагында $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Бу дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасында нинди чагыштырмада бүленәләр?

M—37

1. Трапеция нигезләренең аермасы 4 см га, ә урта сызыгы 10 см га тигез. Трапециянең нигезен табыгыз.
2. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясендә зуррак AD нигезенә B түбәсеннән төшерелгән перпендикуляр аны 4 см га һәм 10 см га тигез булган 2 кисемтәгә бүлә. Трапециянең нигезләрен һәм урта сызыгын табыгыз.

M—38

$ABCD$ — ягы 4 см га тигез булган квадрат. AB һәм CD якларында $AM = KC = 3$ булырлык итеп, AM һәм KC кисемтәләре бирелгән.

а) $MBKD$ — параллелограмм икәнлеген исбатлагыз.

б) Аның периметрын һәм мәйданын табыгыз.

M—39

1. Үзәге O ноктасында булган 10 см радиуслы әйләнәнең A ноктасы аша AM орынмасы үткәрелгән. OM кисемтәсе әйләнәне B ноктасында кисеп үтә. $AM = 10\sqrt{3}$ см га тигез булса, иң кечкенә AB дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.
2. Бер ягы әйләнәнең үзәге аша үтәрлек, ә калган ике ягы аннан 3 см һәм $3\sqrt{3}$ см га читтә ятарлык итеп, өчпочмакка әйләнә камалган. Әйләнәнең радиусын табыгыз.

2 нче вариант

М—1

1. *ABCDEF* кабарынкы алтыпочмагында $AB = AF$. *A* түбәсеннән ике үзара күрше булмаган түбәгә тигез диагональләр үткәрелгән, $\angle BAC = \angle EAF$. *ABCE* һәм *ACEF* дүртпочмакларының периметрлары тигез икәнен исбатлагыз.
2. Почмаклары суммасы 540° ка тигез булган кабарынкы күппочмакның ничә ягы бар?

М—2

1. *ABCD* дүртпочмагында $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, *O* — диагональләре кисешү ноктасы. *AOD* өчпочмагының периметры 25 см га тигез, $AC = 16$ см, $BD = 14$ см. *BC* ны табыгыз.
2. *A* почмагы кысынкы булган *ABCD* параллелограммы бирелгән. *B* түбәсеннән *AD* турысына *BK* перпендикуляры төшерелгән, $AK = BK$. $\angle C$ һәм $\angle D$ ны табыгыз.

М—3

1. *ABCDEP* кабарынкы алтыпочмагының барлык яклары да тигез һәм $\angle A = \angle D$. $BP \parallel CE$ икәнен исбатлагыз.
2. *ABCD* параллелограммы бирелгән. *AC* диагоналенең дәвамында *A* һәм *C* түбәләре ягында, $AA_1 = CC_1$ булырлык итеп, A_1 һәм C_1 нокталары билгеләнгән. $\angle BA_1D = \angle BC_1D$ икәнен исбатлагыз.

М—4

1. *MHPK* трапециясендә *MK* — зур нигез. *MH* һәм *PK* турылары *E* ноктасында кисешәләр, $\angle MEK = 80°$, $\angle EHP = 40°$. Трапециянең почмакларын табыгыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең кысынкы почмагы 60° ка тигез. Зур ягы һәм зур нигезе 20 шәр см га тигез. Трапециянең кечкенә нигезен табыгыз.

М—5

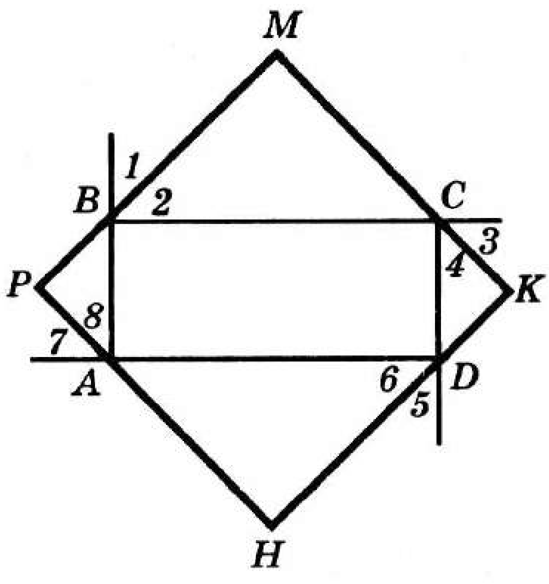
1. Кечкенә ягы, кысынкы почмагы һәм бу ягы белән кечкенә диагонале арасындагы почмагы буенча параллелограмм төзегез.
2. Кечкенә диагонале, зур нигезе һәм зур ягы буенча турыпочмаклы трапеция төзегез.

М—6

1. *MPKH* турыпочмаклыгының диагональләре *O* ноктасында кисешәләр. *OA* кисемтәсе *MOP* өчпочмагының биеклеге, $\angle AOP = 15°$. *OHK* почмагын табыгыз.
2. *A* почмагы кысынкы булган *ABCD* параллелограммының диагональләре *O* ноктасында кисешәләр. *AO* һәм *OC* кисемтәләрендә тиңдәшле рәвештә *P* һәм *K* ноктлары алынган, $OP = OD$, $OK = OB$. *PBKD* дүртпочмагының турыпочмаклык булуын исбатлагыз.

М—7

1. *K* почмагы җәенке булган *MPKH* ромбының диагональләре *E* ноктасында кисешәләр. *PKE* өчпочмагының бер почмагы 16°30′ка тигез. Бу өчпочмакның калган почмакларын һәм *PMH* почмагын табыгыз.
2. 8 нче рәсемдә бирелгән *ABCD* дүртпочмагы — турыпочмаклык, биредә $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$. *MKHP* кабарынкы дүртпочмагының квадрат булуын исбатлагыз.



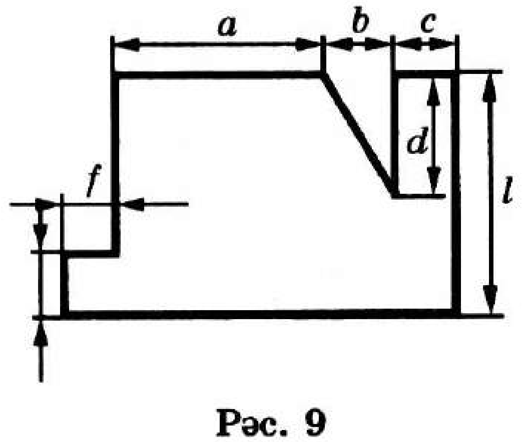
Рәс. 8

М—8

1. Җәенке почмагы һәм кечкенә диагонале буенча ромб төзегез.
2. Ниндидер бер квадратның диагональләре кисешү ноктасыннан аның бер ягына төшерелгән перпендикулярга тигез кисемтә бирелгән. Бу квадратны төзегез.

М—9

1. 9 нчы рәсемдә сурәтләнгән фигураның мәйданын исәпләү өчен формула төзегез.
2. Квадратның периметры 32 см га, ә турыпочмаклыкның бер ягы 4 см га тигез. Әгәр турыпочмаклыкның мәйданы квадратныкы кадәр булса, турыпочмаклыкның икенче ягын табыгыз.



Рәс. 9

М—10

1. *MPKT* параллелограммының *MT* ягында *E* ноктасы билгеләнгән, $\angle PEM = 90°$, $\angle EPT = 45°$, $ME = 4$ см, $ET = 7$ см. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
2. *ABCD* параллелограммында *M, P, K, T* нокталары — тиңдәшле рәвештә *AB, BC, CD, AD* якларының урталары. *ABPT* һәм *AMKD* дүртпочмакларының мәйданнары тигез икәнен исбатлагыз.

М—11

1. Гипотенузасы 10 см га тигез булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Мәйданы 36 $см^2$ булган *ABC* өчпочмагының *AC* ягында, $AD : DC = 1 : 5$ булырлык итеп, *D* ноктасы алынган. *ABD* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

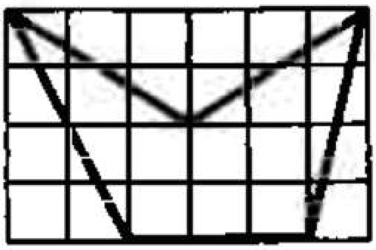
1. Турыпочмаклы трапециянең мәйданы 30 $см^2$, периметры 28 см, ә кечерәк ягы 3 см. Трапециянең зуррак ягын табыгыз.
2. *MPKT* трапециясенең кечкенә нигезе $PK = 6$ см, ә биеклеге 8 см. Әгәр *MKT* өчпочмагының мәйданы 48 $см^2$ булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы трапециянең нигезләре 9 см һәм 18 см, ә зуррак ягы 15 см га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Яклары 1, 1, $\sqrt{2}$ булган өчпочмакның почмакларын табыгыз.

М—14

1. 10 нчы рәсемдә сурәтләнгән фигураны дәфтәрегезгә күчереп сызыгыз. Кирәкле үлчәүләрне башкарып, фигураның мәйданын исәпләгез.
2. *MPKH* турыпочмаклыгының *PK* ягында *E* ноктасы билгеләнгән, $ME = 15$ см, $PM = 12$ см, $EK = 6$ см. *MEKH* дүртпочмагының мәйданын табыгыз.



Рәс. 10

М—15

1. *KP, MN* һәм *DO, AL* кисемтәләре бер-берсенә пропорциональ. Әгәр $KP = 8$ дм, $MN = 40$ см, $DO = 1$ м булса, *AL* ны табыгыз.
2. Турыпочмаклы *ABC* өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, *AK* — биссектриса. *BC, BK, KC* ны табыгыз.

М—16

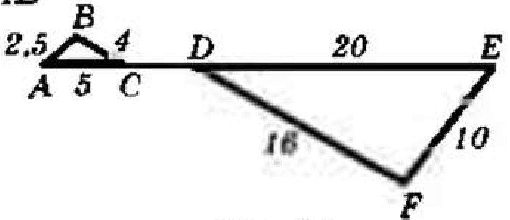
1. KPF һәм EMT өчпочмаклары охшаш, биредә $\frac{KP}{ME} = \frac{PE}{MT} = \frac{KF}{ET}$, $\angle F = 20°$, $\angle E = 40°$. Бу өчпочмакларның калган почмакларын табыгыз.
2. Охшаш өчпочмакларның ике охшаш ягы 2 см һәм 5 см га тигез. Беренче өчпочмакның мәйданы 8 см^2. Икенче өчпочмакның мәйданын табыгыз.

М—17

1. Параллелограммның C түбәсе аша AD ягын E ноктасында, ә BA ягының дәвамын F ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. $\Delta ECD \backsim \Delta FBC$ икәнен исбатлагыз.
2. ABC һәм DEF өчпочмакларында $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AC = 6$, $EF = 2$, $AB = 3{,}3$ һәм DF ягының BC ягыннан 3,2 гә кечерәк икәне билгеле. Өчпочмакның билгесез якларын табыгыз.

М—18

1. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. E, F, M, N нокталары тиңдәшле рәвештә параллелограммның AB, BC, CD, AD якларында яталар, $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. $\angle BEF = \angle NMD$ булуын исбатлагыз.
2. 11 нче рәсемдә сурәтләнгән өчпочмакларның охшаш булуын исбатлагыз һәм BC һәм DF турыларының үзара торышын ачыклагыз.



Рәс. 11

М—19

1. O — $ABCD$ ромбы диагональләренең кисешү ноктасы, ә E һәм F — BC, DC якларының урталары. $EF = BO$ һәм $EF \perp AC$ булуын исбатлагыз.
2. MPK өчпочмагының медианалары кисешү ноктасы аша MK ягына параллель CD кисемтәсе үткәрелгән ($C \in MP$, $D \in PK$), $CD = 18$ см. MK ягын табыгыз.

М—20

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $CD \perp AB$, $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ икәне билгеле. ADC һәм ACB өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.
2. $ABCD$ — турыпочмаклы трапеция ($\angle D = \angle C = 90°$), $BC = 3$, $CD = 6$, $BD \perp AB$. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—21

1. Бирелгән C почмагы, ике ягының чагыштырмасы $AC : CB = 2 : 3$ һәм CD биссектрисасы буенча ABC өчпочмагын төзегез.
2. Бирелгән кисемтәне $1 : 4 : 7$ чагыштырмасында бүлегез.

М—22

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $CD \perp AB$, $AD = 2$, $DB = 3$, A почмагының синусын, косинусын һәм тангенсын табыгыз.
2. $ABCD$ турыпочмаклы трапеция ($\angle D = \angle C = 90°$), $BC = 2$, $AD = 4$, $CD = 2\sqrt{3}$. A почмагын табыгыз.

М—23

1. Ромбның биеклеге h, ә кысынкы почмагы α. Ромбның мәйданын табыгыз. Әгәр $h = 17{,}3$, $\alpha = 52°43'$ булса, бу мәйданны исәпләгез.
2. ABC өчпочмагында $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BD \perp AC$, $AD = 3$. BC ягын табыгыз.

М—24*

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $D \in AB$ $(A - D - B)$, $DE \perp BC$, $DE = 3$, $DC = 5$, $AC = 2BC$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. $ABCD$ турыпочмаклыгының AC диагонале $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ кә тигез һәм AD ягы белән $30°$ лы почмак төзи. AD ягы D ноктасы ягына 3 кә тигез булган DE кисемтәсенә дәвам ителгән. BE кисемтәсе CD ягын K ноктасында кисеп үтә. BE кисемтәсе CD ягын нинди чагыштырмада бүлә?

М—25

1. $ABCD$ квадратында $AC = 10\sqrt{2}$, ә O — AD ягының уртасы. Үзәге O ноктасында булган әйләнә үткәрелгән.
   а) Әйләнә AB һәм CD турыларына орынсын;
   б) турылар белән әйләнәнең уртак ноктасы булмасын;
   в) һәрбер туры белән икешәр уртак ноктасы булсын өчен, әйләнәнең радиусы нинди булырга тиеш?
2. Әйләнәгә үткәрелгән орынманың орыну ноктасы C дан аның ике ягына CA һәм CB кисемтәләре салынган, биредә $\angle AOC = \angle BOC$ (O — әйләнә үзәге). Әйләнә үзәге 8 гә тигез, $AB = 30$. Әйләнә үзәгеннән A һәм B нокталарына кадәр булган ераклыкны табыгыз.

М—26

1. Үзәге O ноктасында булган әйләнәдә, A ноктасыннан OB радиусына кадәр ераклык радиус озынлыгыннан 2 тапкырга кечерәк булырлык итеп, OA һәм OB радиуслары үткәрелгән. AB дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.
2. Әйләнәдә AB диаметры һәм AC хордасы үткәрелгән. Әгәр AC һәм CB дугаларының градуслы үлчәмнәренең чагыштырмасы 7 : 2 булса, BAC почмагын табыгыз.

М—27

1. Әйләнәнең AB һәм CD хордалары E ноктасында кисешәләр. $AE : EB = 1 : 3$, $CD = 20$, $DE = 5$. AB хордасын табыгыз.
2. AB — әйләнәнең диаметры. E ноктасы әйләнә өстендә ята. $EF \perp AB$, $FB = 4$, $EF = 6$. Әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—28*

1. AB — үзәге O ноктасында булган әйләнә диаметры. OB кисемтәсен диаметр итеп алып, r радиуслы әйләнә үткәрелгән. А ноктасы аша кечкенә әйләнәгә AK орынмасы үткәрелгән. (K — орыну ноктасы.) AK ны табыгыз.
2. Әйләнәдә A, B, C, D нокталары билгеләнгән. $\smile BC = \smile AD$. $AB \parallel CD$ икәнен исбатлагыз.

М—29

1. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) p — AB ягына төшерелгән урта перпендикуляр, p АС турысын K ноктасында кисеп үтә, $AK = 5$, $BC = 4$. BKC өчпочмагының периметрын табыгыз.
2. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $AB = BC$, AE һәм CF медианалары K ноктасында кисешәләр, $BK = 6$, $AC = 10$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—30

1. Тигезьянлы өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусы $\sqrt{3}$ см га тигез. Өчпочмакның ягын табыгыз.
2. Әйләнә нигез янындагы почмагы 30° ка тигез булган тигезьянлы трапеция белән камалган. Трапециянең биеклеге 4 см. Трапециянең нигез озынлыкларының суммасын табыгыз.

М—31

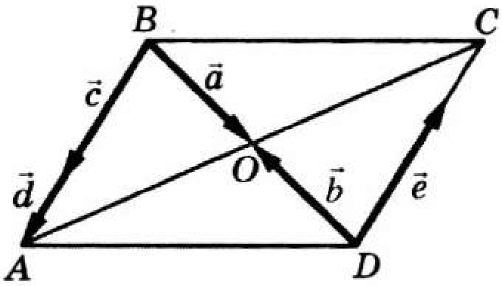
1. ABC өчпочмагы әйләнә белән камалган. Әгәр $AB = 24$ см, ә әйләнәнең үзәге бу яктан 5 см ераклыкта булса, әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Катетларының берсе 9 см га тигез булса, 7,5 см радиуслы әйләнәгә камалган турыпочмаклы өчпочмакның периметрын табыгыз.

М—32

$ABCD$ — параллелограмм. 12 нче рәсемдәге:

а) коллинеар;
б) бердәй юнәлешле;
в) капма-каршы юнәлешле;
г) тигез озынлыктагы векторлар парын күрсәтегез.

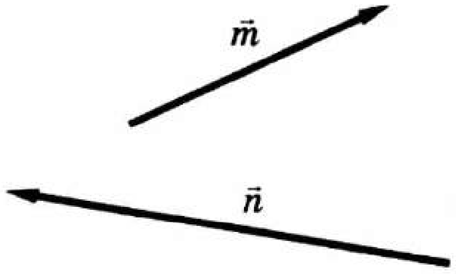
AB турысында B ноктасыннан $\vec{e}$ векторына тигез вектор салып буламы?



Рәс. 12

М—33

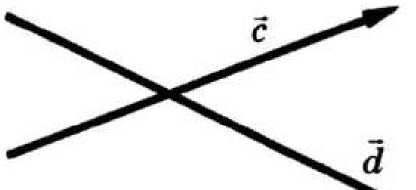
1. 13 нче рәсемдә $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$ векторлары сурәтләнгән. $\vec{m}+\vec{n}$ векторын ике ысул белән төзегез.
2. Ирекле A, B, C, D, E нокталары бирелгән. $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{EB}+\overline{CE}+\overline{BD}$ булуын исбатлагыз.



Рәс. 13

М—34

1. 14 нче рәсемдә $\vec{d}$ һәм $\vec{c}$ векторлары сурәтләнгән. $\vec{d}-\vec{c}$ векторын төзегез.
2. ABC өчпочмагы бирелгән. $\overline{BA}$ векторын $\overline{CB}$ һәм $\overline{CA}$ векторлары аша күрсәтегез.
3. CM — тигезьянлы турыпочмаклы ABC өчпочмагының туры C почмагы түбәсеннән үткәрелгән медиана. Әгәр $AB = 10$ булса, $|\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BM}|$ ны табыгыз.



Рәс. 14

М—35.

1. Коллинеар булмаган $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$ векторларын сызыгыз. $3\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$ векторын төзегез.
2. $ABCD$ параллелограммында P — диагональләр кисешү ноктасы, M — BC ягының уртасы. $\overline{DP}$ һәм $\overline{DM}$ векторларын $\overline{DA} = \vec{p}$ һәм $\overline{DC} = \vec{m}$ векторлары аша күрсәтегез.

М—36

1. $ABCD$ параллелограммының диагональләре O ноктасында кисешәләр, K — BO ягының уртасы, $\overline{AK}$ векторын $\overline{AB} = \vec{m}$ һәм $\overline{AC} = \vec{p}$ векторлары аша күрсәтегез.
2. $ABCD$ дүртпочмагы һәм ирекле O ноктасы бирелгән. $\overline{AB} + \overline{OD} = \overline{OC}$, $\angle A = 15^\circ$ икәне билгеле. Дүртпочмакның калган якларын табыгыз.

М—37

1. Трапециянең бер нигезе икенчесеннән ике тапкыр зуррак. Трапециянең урта сызыгы 15 см. Трапециянең нигезләрен табыгыз.
2. $MHPK$ тигезьянлы трапециясендә зуррак нигез MP га HE перпендикуляры үткәрелгән, $ME = 6$ см, $HK = 10$ см. Трапециянең зуррак нигезен һәм урта сызыгын табыгыз.

М—38

1. $ABCD$ турыпочмаклыгының BC һәм AD ягында, $\angle BAM = 40^\circ$, $\angle DCK = 50^\circ$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары алынган. $CK = 8$ см, $BC = 20$ см.
   а) $BM : CD = AM : KC$ икәнен исбатлагыз.
   б) Микрокалькулятор ярдәмендә KD, CD, BM кисемтәләрен һәм $AMCK$ дүртпомагының мәйданын исәпләгез.

М—39

1. AB кисемтәсе — радиусы 5 см булган ниндидер бер әйләнәнең диаметры, BC турысы әйләнәгә орынма, ә $AC = 10\sqrt{2}$. Бирелгән әйләнәнең ABC өчпочмагы эчендәге дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.
2. $\angle A = 90^\circ$ булган ABC өчпочмагына үзәге O ноктасында булган әйләнә камалган. Әгәр $OC = 5$ дм һәм $AO = 3\sqrt{2}$ дм булса, әйләнә белән AC турысының орыну ноктасы AC ягын нинди кисемтәләргә бүлүен табыгыз.

М—1

1. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән, $AB = AD$, $BC = CD$ — аның үзара тигез булган ике пар чиктәш яклары, ә O — дүртпочмак диагональләренең кисешү ноктасы. $ABCOD$ һәм $ABOCD$ бишпочмакларының периметрларын чагыштырыгыз.
2. Кабарынкы күппочмакның тышкы почмакларының суммасы күппочмакның яклары санына бәйле булмавын исбатлагыз.

М—2

1. $ABCD$ дүртпочмагында $\angle A + \angle B = 180°$, $AB \parallel CD$. BC һәм AD якларында, $BM = KD$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары бирелгән. M һәм K нокталарының дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасыннан тигез ераклыкта ятуын исбатлагыз.
2. $MPKH$ параллелограммының PK һәм MH якларында тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталары алынган, $MP = PB = AK$, $\angle MPB = 60°$. Параллелограммның почмакларын табыгыз, BM һәм AH кисемтәләрен чагыштырыгыз.

М—3

1. Тигезьянлы ABC өчпочмагының AC нигезендә — K ноктасы, ә AB һәм BC якларында тиңдәшле рәвештә M һәм P нокталары билгеләнгән, $PK = MB$, $\angle KPC = 80°$, $\angle C = 50°$. $\angle KMB + \angle MBP = 180°$ булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагының эчендә M ноктасы, ә AB һәм AC якларында, AM һәм KH кисемтәләренең урталары уртак һәм $\angle KMH = \angle C$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә K һәм H нокталары билгеләнгән. ABC өчпочмагының тигезьянлы булуын исбатлагыз.

М—4

1. Тигезьянлы трапециянең диагонале аның ян ягы белән 120° лы почмак төзи. Трапециянең ян ягы аның кечерәк нигезенә тигез. Трапециянең почмакларын табыгыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең кысынкы почмагы һәм кечерәк диагонале белән кечерәк нигезе арасындагы почмагы һәрберсе 60° ка тигез. Трапециянең нигезләре чагыштырмасын табыгыз.

М—5

1. Ике диагонале һәм зур ягы буенча параллелограмм төзегез.
2. Ян ягы, зуррак нигезе һәм трапециянең нигезләрен тәшкил итүче турылар арасындагы ераклыкка тигез булган кисемтә буенча тигезьянлы трапеция төзегез.

М—6

1. O — $ABCD$ турыпочмаклыгының диагональләре кисешү ноктасы, ә BH һәм DE тиңдәшле рәвештә ABO һәм COD өчпочмакларының биеклекләре, $\angle BOH = 60°$, $AH = 5$ см. OE ны табыгыз.
2. $ABCD$ дүртпочмагының диагональләре O ноктасында кисешәләр, $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle BAC = \angle DCA$. ABC почмагын табыгыз.

М—7

1. O — $ABCD$ ромбының диагональләре кисешү ноктасы, OM, OK, OE — тиңдәшле рәвештә AB, BC, CD якларына төшерелгән перпендикулярлар. $OM = OK$ икәнен исбатлагыз, MOB һәм COE почмакларының суммасын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында $\angle B = 90°$, $AB = BC$. AB һәм BC якларында M һәм P, ә AC ягында, $MPHK$ дүртпочмагы квадрат булырлык итеп, K һәм H нокталары алынган, $MP = a$. AC ягын табыгыз.

М—8

1. Диагонале һәм шул диагонале белән ягы төзегән почмак буенча турыпочмаклык төзегез.
2. Бирелгән кысынкы почмак эчендә, бирелгән ягы буенча, квадратның ике түбәсе шул почмакның бер ягында, ә өченче түбәсе икенче ягында ятарлык итеп, квадрат төзегез.

М—9

1. $ABCD$ параллелограммының BC ягында M ноктасы алынган. Параллелограммның мәйданы AMD өчпочмагының мәйданыннан ике тапкырга зуррак булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ квадратында AD ягының A түбәсе ягына дәвамында M ноктасы алынган, $MC = 20$ дм, $\angle CMD = 30°$. Квадратның мәйданын табыгыз.

М—10

1. Әгәр мәйданы 20 см^2, ә җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклеге, кысынкы почмактан санап, бер ягын 2 см һәм 8 см лы кисемтәләргә бүлсә, параллелограммның почмакларын табыгыз.
2. Нигезләре һәм периметрлары тигез булган параллелограмм белән турыпочмаклыкның мәйданнарын чагыштырыгыз.

М—11

1. ABC өчпочмагында $\angle B = 130°$, $AB = a$, $BC = b$, ә $MPKH$ параллелограммында $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50°$. Өчпочмак мәйданының параллелограмм мәйданына чагыштырмасын табыгыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында O ноктасы — AB гипотенузасына үткәрелгән CH медианасының уртасы, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. OBC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

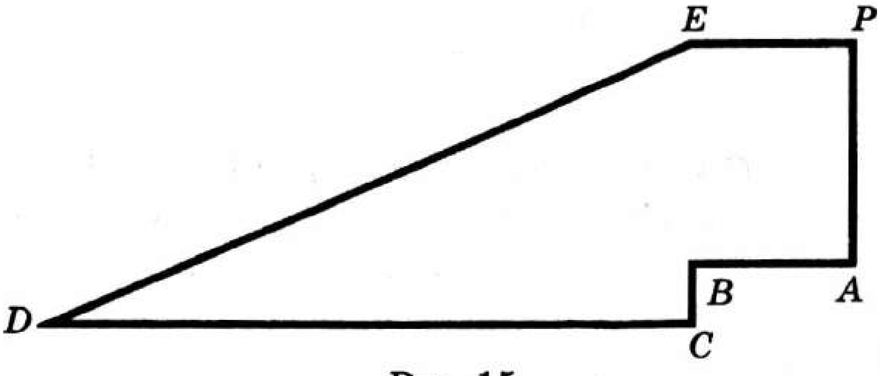
1. Турыпочмаклы трапециянең кечерәк ягы 3 дм га тигез һәм кечерәк диагональ белән 45° лы почмак төзи. Трапециянең кысынкы почмагы да 45° ка тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Тигезьянлы трапециянең кечерәк нигезе түбәләреннән үткәрелгән биеклекләре зуррак нигезне, икесенең суммасы өченчесенә тигез булырлык итеп, 3 кисемтәгә бүләләр. Әгәр кечерәк нигезе һәм биеклеге 6 шар см га тигез булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Ниндидер трапециянең җәенке почмагы түбәсеннән чыгучы диагонале һәм бер ягы тиңдәшле рәвештә 26 см һәм $\sqrt{577}$ см га, ә трапециянең биеклеге 24 см га, кечерәк нигезе 7 см га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. AC ягында, $AM = 1$, $BM = 1$ булырлык итеп, M ноктасы билгеләнгән. ABC почмагын табыгыз.

М—14

1. Укучыга 15 нче рәсемдә сурәтләнгән турыпочмаклыкның мәйданын исәпләргә кирәк иде. Аның бары тик масштаблы линейкасы гына бар. Үлчәүләрдән соң укучы $AB = PE = 3$ см, $AP = BE = 4$ см, $AE = 5$ см, $BC = 1$ см, $DC = 12$ см, $DE = 13$ см булуын һәм C, B, E нокталарының бер турыда ятуын ачыклады. Үлчәү нәтиҗәләрен кулланып, укучы мәйданны исәпли аламы? Әгәр исәпли алса, ул күпме булыр?



Рәс. 15

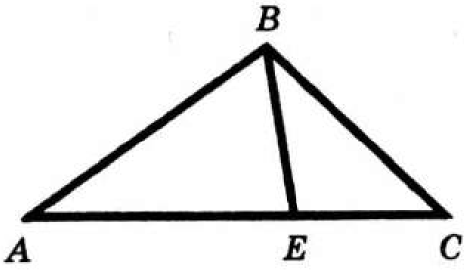
2. Тигезьянлы трапециянең диагонале, кечерәк нигезе һәм биеклеге тиңдәшле рәвештә $\sqrt{35}$ см, 3 см һәм $\sqrt{10}$ см га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCD$ параллелограммының диагональләре O ноктасында кисешәләр, $CD = 10$ см. Әгәр $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$ булса, параллелограммның периметрын табыгыз.
2. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе аның ягыннан 9,6 см га кечерәк, ә биссектрисасы аның ягын 3 : 5 чагыштырмасындагы кисемтәләргә бүлә. Өчпочмакның периметрын табыгыз.

М—16

1. 16 нчы рәсемдә $\Delta BEC \sim \Delta ABC$. $AE = 16$ см, $CE = 9$ см, ABC һәм BEC почмаклары җәенке. BC ны табыгыз.
2. Охшаш өчпочмакларның периметрлары 2 : 3 чагыштырмасында, ә мәйданнарының суммасы 260 см². Һәр өчпочмакның мәйданын табыгыз.



Рәс. 16

М—17

1. ABC өчпочмагында BC ягында ятучы P ноктасы аша AB һәм AC якларын тиңдәшле рәвештә Q һәм R нокталарында кисеп үтүче, AC һәм AB га параллель булган турылар үткәрелгән. $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCD$ трапециясенең диагональләре O ноктасында кисешәләр. BOC һәм AOD өчпочмакларының мәйданнары 1 : 9 чагыштырмасында. BC һәм AD нигезләренең суммалары 4,8 см га тигез. Трапециянең нигезләрен табыгыз.

М—18

1. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында BD һәм B_1D_1 — медианалар, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. BDC өчпочмагының $B_1D_1C_1$ өчпочмагына охшаш булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 9$. E ноктасы BC ягында ята. Өчпочмакның эчендә, $MB = 1\frac{7}{9}$, $ME = 2\frac{2}{3}$, $CE = 2$ булырлык итеп, M ноктасы алынган. $ME \parallel AC$ булуын исбатлагыз.

М—19

1. CD ягы $ABCD$ һәм $DCEF$ дүртпочмаклары өчен уртак. A, D, F нокталары бер турыда ятмый, $AB = CD = EF$, $AB \parallel CD \parallel EF$. $ABCD$ һәм $DCEF$ дүртпочмакларының диагональләре тиңдәшле рәвештә O_1 һәм O_2 нокталарында кисешәләр. $AF \parallel O_1O_2$ һәм $AF = 2O_1O_2$ булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = BC$, ә медианалары O ноктасында кисешәләр һәм $OA = 5$, $OB = 6$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—20

1. Нигезе AC булган тигезьянлы ABC өчпочмагында BD медианасы үткәрелгән, $DE \perp BC$, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$, DEC өчпочмагының мәйданы 20 см^2. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. $ABCD$ — турыпочмаклык. $AB = 4$, $BC = 6$, $BE \perp AC$. E ноктасы аша, AD ягына параллель итеп, CD ягы белән F ноктасында кисешкәнче туры үткәрелгән. EF ны табыгыз.

М—21

1. Җәенке B почмагы, $AB : BC = 3 : 2$ чагыштырмасы һәм AD биеклеге буенча ABC өчпочмагы төзегез.
2. a һәм b кисемтәләре бирелгән. $x = \frac{a^2}{b}$ кисемтәсен төзегез.

М—22

1. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясендә ($\angle D = \angle C = 90°$, AC һәм BD — нигезләр) $AB = 9$, $BD = 12$, $AD = 15$. CBD почмагының синусын, косинусын һәм тангенсын табыгыз.
2. $ABCD$ трапециясендә $AD = 2BC$, $BD = 3\sqrt{3}$, $AC = 3$, $BD \perp AC$. Трапециянең нигезе белән диагональләре арасындагы почмакларны табыгыз.

М—23

1. $ABCD$ ромбының кысынкы почмагы α һәм кечерәк диагонале d бирелгән. Ромбның мәйданын табыгыз. Әгәр $d = 12{,}3$, $\alpha = 62°50'$ булса, мәйданны исәпләгез.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) M ноктасы BC катетында ята. Бу нокта AB һәм AC дан тигез ераклыкта ята, $MC = 2{,}7$, $AM = 4{,}1$. ABC өчпочмагының почмакларын табыгыз.

М—24*

1. Тигезьянлы өчпочмакка яклары $1:3$ чагыштырмасында булган турыпочмаклык камалган. Турыпочмаклыкның кечерәк ягы өчпочмакның нигезендә, ә ике түбәсе өчпочмакның ян якларында яталар. Өчпочмакның яклары 10, 10, 12 гә тигез. Турыпочмаклыкның мәйданын табыгыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\cos B = \frac{3}{5}$.

   A почмагының биссектрисасы BC катетын бүлеп килеп чыккан кисемтәләрнең чагыштырмасын табыгыз.

М—25

1. AB һәм CD — әйләнәнең үзара перпендикуляр диаметрлары. CB хордасы B ноктасы артына CB га тигез булган BE кисемтәсенә дәвам ителгән. DE турысының һәм әйләнәнең үзара торышын ачыклагыз.
2. Әйләнәнең AB диаметры B ноктасы артына BC кисемтәсенә дәвам ителгән, CD — әйләнәгә орынма (D — орыну ноктасы). B ноктасы аша CD га параллель хорда үткәрелгән. Әйләнәнең радиусы 10 см, ә әйләнәнең үзәгеннән хордасына кадәр ераклык 4 см. AC ны табыгыз.

М—26

1. MA һәм MB — үзәге O ноктасында булган әйләнәнең хордалары, $\angle AMB = 30°$. Әгәр әйләнәнең радиусы 10 см га тигез булса, AB хордасының озынлыгын табыгыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының ($\angle C = 90°$) AC катетын диаметр итеп алып, AB гипотенузасын D ноктасында кисеп үтүче әйләнә үткәрелгән. BD = 4 см, AD = 9 см, CD ны табыгыз.

М—27

1. Әйләнәнең CD диаметры AB хордасына перпендикуляр, AB һәм CD E ноктасында кисешәләр, CE = 2 см. AB һәм CE ның суммасы әйләнәнең диаметрына тигез. Әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Циркуль һәм линейка ярдәмендә озынлыклары 1 см һәм 2 см булган кисемтәләрнең арасында урта пропорциональ кисемтә төзегез.

М—28*

1. 8 см һәм 2 см радиуслы ике әйләнә тышкы яктан орыналар. Аларның уртак орынмаларының озынлыгын табыгыз.
2. Үзәге O ноктасында булган әйләнәнең OA радиусында D ноктасы ята. D ноктасы аша узучы BC хордасы AO га перпендикуляр. C ноктасында, OA радиусының дәвамы белән E ноктасында кисешерлек итеп, әйләнәгә орынма үткәрелгән. CA ның BCE почмагының биссектрисасы булуын исбатлагыз.

М—29

1. ABC өчпочмагының AD һәм CE биссектрисалары M ноктасында кисешәләр, $BM = m$, $\angle ABC = \alpha$. M ноктасыннан AC ягына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагының AD һәм CE биеклекләре O ноктасында кисешәләр, $OA = 4$, $OD = 3$, $BD = 4$. O ноктасыннан AC ягына кадәр булган ераклыкны табыгыз.

М—30

1. Яклары 10 см, 10 см, 12 см булган өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Ромбның периметры 80 см, диагональләренең берсе 32 см га тигез. Ромбка камалган әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—31

1. Яклары 10 см, 10 см, 12 см булган өчпочмакны камаган әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. *ABCD* дүртпочмагы, *AD* ягы диаметр булырлык итеп, әйләнәгә камалган. $\angle ABC = 130°$, $\angle BCD = 140°$. *BAD*, *CDA*, *ACB* почмакларын табыгыз.

М—32

1. *ABC* — турыпочмаклы өчпочмак ($\angle C = 90°$), $\angle A = 45°$. Түбәндәге язмаларның кайсының мәгънәсе бар:

   а) $\overline{AB} > \overline{BC}$; в) $\overline{AC} = \overline{BC}$;

   б) $|\overline{AB}| > |\overline{BC}|$; г) $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$?

2. 17 нче рәсемдә сурәтләнгән векторларның кайсылары:

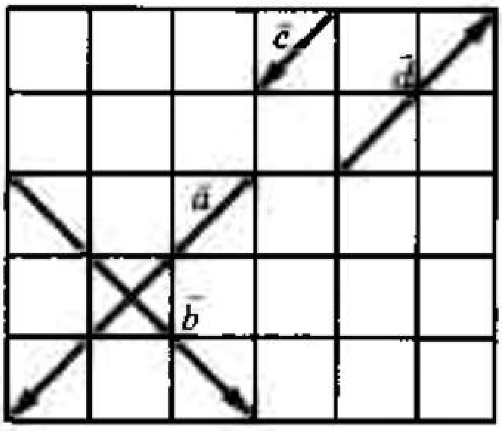
   а) коллинеар;

   б) бердәй юнәлешле;

   в) капма-каршы юнәлешле;

   г) тигез озынлыкка ия?

   Бу векторларны бер ноктадан салыгыз.



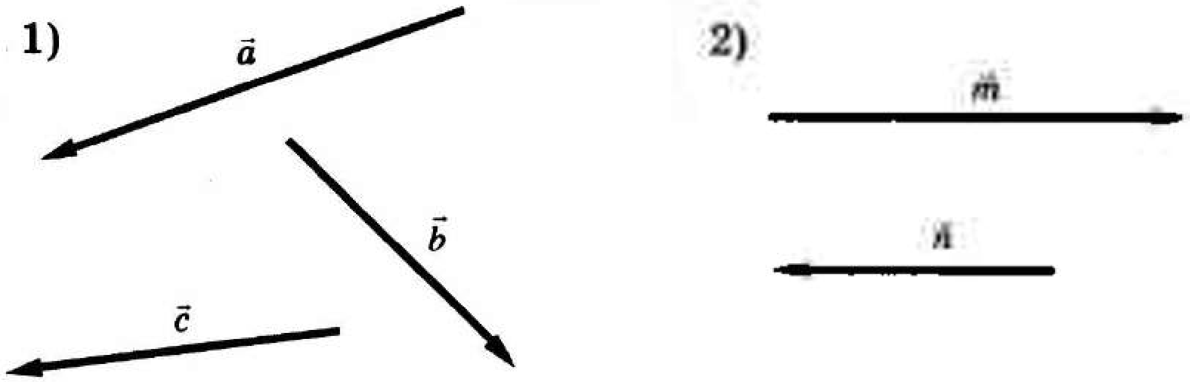
Рәс. 17

М—33

1. 18 нче рәсемдә $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ векторлары сурәтләнгән.

   1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ суммасын төзегез;

   2) $\vec{m} + \vec{n}$ суммасын төзегез.

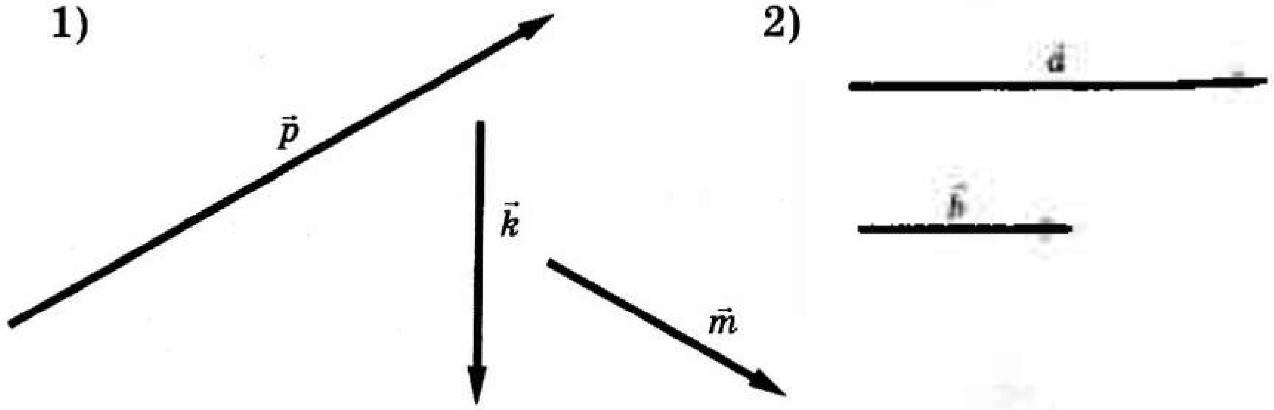


Рәс. 18

2. *ABCD* параллелограммының диагональләре *M* ноктасында кисешәләр. $\overline{AM} + \overline{DC} + \overline{MD} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{DA}$ булуын исбатлагыз.

M—34

1. 19 нчы рәсемдә $\vec{p}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, векторлары сурәтләнгән.
   1) $\vec{p} - \vec{k} + \vec{m}$ векторын төзегез;
   2) $\vec{a} - \vec{b}$ векторын төзегез.



Рәс. 19

2. *ABCD* параллелограммында $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ векторларын $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$ векторлары аша күрсәтегез.
3. *ABCD* турыпочмаклыгында $AD = 12$, $CD = 5$, O — диагональләре кисешү ноктасы. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OD}|$ ны табыгыз.

M—35

1. *ABC* өчпочмагы бирелгән.

$$-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

векторын төзегез.

2. *ABCD* параллелограммының *BC* ягында $BK : KC = 1 : 4$ булырлык итеп *K* ноктасы алынган. $\overrightarrow{AK}$ һәм $\overrightarrow{KD}$ векторларын $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ һәм $\overrightarrow{AD} = \vec{K}$ векторлары аша күрсәтегез.

M—36

1. *ABC* өчпочмагының *AB* һәм *BC* якларында, $AB = 3BM$, $BC = 3BH$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә *M* һәм *H* нокталары алынган. Векторларны кулланып, $MH \parallel AC$ һәм $MH = \frac{1}{3}AC$ булуын исбатлагыз.
2. *E* һәм *F* — *ABCD* дүртпочмагында *BC* һәм *AD* якларының урталары. $\overrightarrow{EF}$ векторын $\overrightarrow{BA}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары аша күрсәтегез.

М—37

1. *ABCD* трапециясендә (*AD* һәм *BC* — нигезләр) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, $AB = 2$ см. Әгәр диагонале ягына перпендикуляр булса, трапециянең урта сызыгын табыгыз.
2. Тигезьянлы трапециянең кысынкы почмаклары һәрберсе 60°, ягы 10 см, зуррак нигезе 15 см. Трапециянең урта сызыгын һәм кечерәк нигезен табыгыз.

М—38

ABCD — турыпочмаклык. $AB = 8$ см, $BC = 4$ см. *AB* һәм *CD* ягында, $AK : AB = CP : CD = 3 : 8$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә *K* һәм *P* нокталары билгеләнгән.

а) *KBPD* ромб икәнен исбатлагыз.

б) Аның периметрын һәм мәйданын табыгыз.

М—39

1. Үзәге *O* ноктасында булган әйләнәнең *AB* хордасы очлары аша *M* ноктасында кисешүче орынмалар үткәрелгән. Әгәр $AM = 10$ см, ә *OAMB* дүртпочмагының периметры 40 см булса, кечерәк *AB* дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.
2. Трапециянең диагонале зур нигезе белән 30° лы почмак ясый, ә трапецияне камаучы әйләнәнең үзәге шул нигездә ята. Әгәр ягы 2 см булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—1

1. Кабарынкы булмаган $ABCD$ дүртпочмагының AC диагонале, бу дүртпочмакны, $AB > BC$, $AB = AD$, $BC = CD$ булырлык итеп, ике өчпочмакка бүлә. Дүртпочмакның диагональләрен тәшкил итүче турылар O ноктасында кисешәләр. $BCODA$ һәм $DCOBA$ бишпочмакларының периметрларын чагыштырыгыз.
2. Кабарынкы n-почмаклык һәм $n - 1$- почмаклыкларның почмаклары суммалары аермасының n га бәйле булмавын исбатлагыз.

М—2

1. $MPKH$ дүртпочмагында $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$. Дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасы аша PK һәм MH якларын тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталарында кисеп узучы туры үткәрелгән. $AP = HB$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ параллелограммының BC һәм AD якларында M һәм K нокталары алынган, $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30°$. Параллелограммның почмакларын табыгыз, AM һәм CK кисемтәләрен чагыштырыгыз.

М—3

1. MPK өчпочмагының M почмагы $65°$ ка тигез. Өчпочмакның MK, MP, PK якларында, C ноктасы — PK ягының уртасы, $AM = KC$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50°$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A, B, C нокталары билгеләнгән. $\angle CPB + \angle ABP = 180°$ булуын исбатлагыз.
2. Нигезе AC булган тигезьянлы ABC өчпочмагы бирелгән. Аның AB, BC, AC якларында, AE һәм DP кисемтәләренең урталары уртак булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә D, E, P нокталары алынган. $\angle DEP = \angle BCA$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. Тигезьянлы трапециянең зуррак нигезе кечерәк нигезеннән ике тапкырга зуррак. Зуррак нигезнең уртасы белән җәенке почмак түбәсе арасы кечерәк нигез озынлыгына тигез. Трапециянең почмакларын табыгыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең диагонале аның ягына перпендикуляр, кысынкы почмагы $45°$ ка тигез. Нигезләрнең чагыштырмасын табыгыз.

М—5

1. Кечерәк диагонале, диагональләр арасындагы кечерәк почмагы, кечерәк диагонале белән кечерәк ягы арасындагы почмагы буенча параллелограмм төзегез.
2. Диагонале, зуррак нигезе һәм җәенке почмак түбәсеннән трапециянең зуррак нигезе булган турыга төшерелгән перпендикуляр буенча тигезьянлы трапеция төзегез.

М—6

1. *MPKH* турыпочмаклыгында *O* — диагональләр кисешү ноктасы, *PA* һәм *HB* — *MK* турысына *P* һәм *H* түбәләреннән төшерелгән перпендикулярлар. $MA = OB$ икәне билгеле булса, *POM* почмагын табыгыз.
2. *MPKH* дүртпочмагының диагональләре *O* ноктасында кисешәләр, $\angle OMH = \angle OHM$, $PH = MK$, $PK = MH$. *MHK* почмагын табыгыз.

М—7

1. *MPKH* ромбының диагональләре *O* ноктасында кисешәләр. *MK*, *KH*, *PH* якларында тиңдәшле рәвештә *A*, *B*, *C* нокталары билгеләнгән һәм $AK = KB = PC$. $OA = OB$ булуын исбатлагыз, *POC* һәм *MOA* почмакларының суммасын табыгыз.
2. *MPK* өчпочмагында $\angle M = 90°$, $MP = MK$. *MP*, *PK*, *MK* якларында *MABC* дүртпочмагы квадрат булырлык итеп тиңдәшле рәвештә *A*, *B*, *C* нокталары билгеләнгән, $AC = a$. *PK* ны табыгыз.

М—8

1. Диагонале һәм икенче диагонале белән ягы арасындагы почмагы буенча ромб төзегез.
2. Ике капма-каршы түбәсе, бирелгән кысынкы почмакның төрле якларында ятарлык итеп, бирелгән диагонале буенча квадрат төзегез.

М—9

1. AD — $ABCD$ трапециясенең зуррак нигезе. CD ягының уртасы һәм B түбәсе аша AD нурын E ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. Трапециянең мәйданы ABE өчпочмагының мәйданына тигез булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ турыпочмаклыгында B почмагының биссектрисасы AD ягын K ноктасында кисеп үтә, $AK = 5$ см, $KD = 7$ см. Турыпочмаклыкның мәйданын табыгыз.

М—10

1. Әгәр мәйданы 40 см^2, яклары 10 см һәм 8 см булса, параллелограммның почмакларын табыгыз.
2. Параметрлары бер үк һәм квадратның ягы параллелограммның биеклегенә тигез булса, квадратның һәм параллелограммның мәйданнарын чагыштырыгыз (параллелограмм турыпочмаклык түгел).

М—11

1. ABC өчпочмагында $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15°$, ә MPK өчпочмагында $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165°$. Бу өчпочмакларның мәйданнарын чагыштырыгыз.
2. $ABCD$ ромбының диагональләре 5 см һәм 12 см. AC диагоналендә $AM : MC = 4 : 1$ булырлык итеп M ноктасы алынган. AMD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

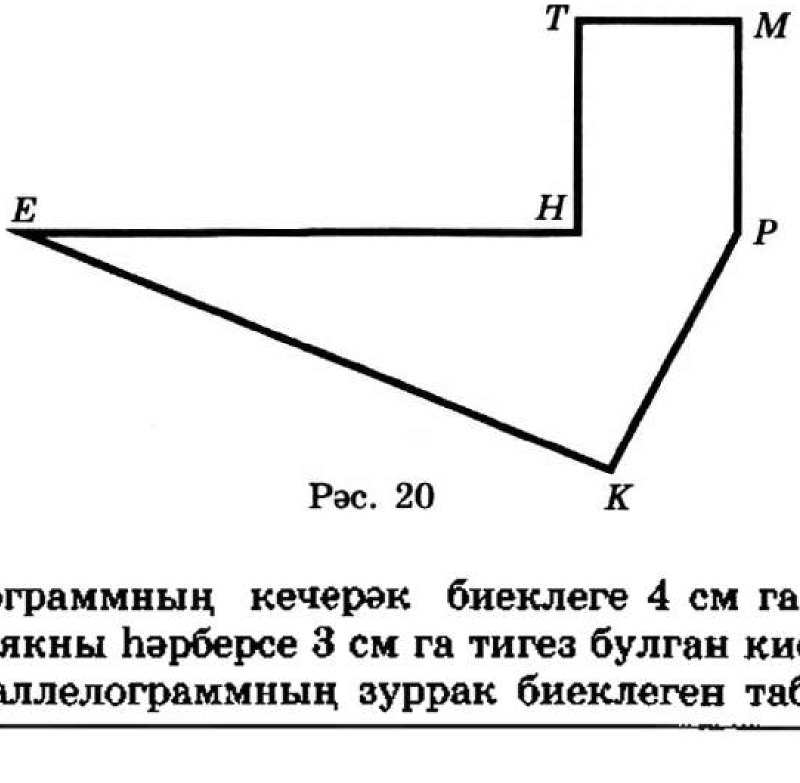
1. Турыпочмаклы трапециянең кечерәк нигезе 4 см һәм ул трапециянең кечерәк диагонале белән 45° лы почмак төзи. Әгәр җәенке почмагы 135° булса, трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Тигезьянлы трапециянең җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклеге 6 см га тигез. Ул зуррак нигезне, берсе кечерәк нигезнең яртысына тигез булырлык итеп, ике кисемтәгә бүлә. Зуррак нигез кечерәк нигездән 2 см га артык. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Параллелограммның кечерәк биеклеге һәм кечерәк ягы тиңдәшле рәвештә 9 см һәм $\sqrt{82}$ см га тигез. Зур диагонале 15 см. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
2. *MPK* өчпочмагында $PK = 2$. $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$ булырлык итеп *A* ноктасы билгеләнгән. $\angle MPK$ ны табыгыз.

М—14

1. Укучыга 20 нче рәсемдә сурәтләнгән күппочмакның мәйданын исәпләргә кирәк. Аның бары тик масштаблы линейкасы гына булган. Үлчәүләр үткәргәннән соң, ул $MP = HT = 4$ см, $MT = PH = 3$ см, $MH = 5$ см, $PH = 3$ см, $PK = 5$ см, $KE = 12$ см булуын ачыклады. *P*, *H*, *E* нокталары бер турыда яталар. Укучы бу нәтиҗәләр буенча мәйданны исәпли аламы? Бу мәйдан күпмегә тигез?



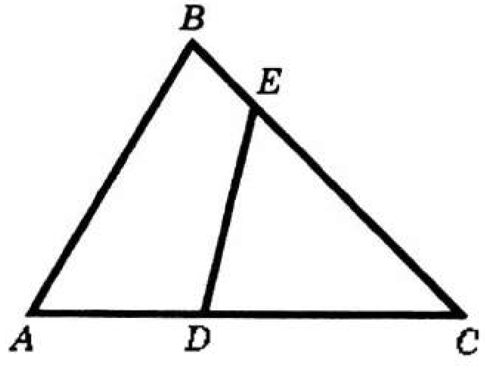
Рәс. 20

2. Параллелограммның кечерәк биеклеге 4 см га тигез һәм ул зуррак якны һәрберсе 3 см га тигез булган кисемтәләргә бүлә. Параллелограммның зуррак биеклеген табыгыз.

М—15

1. *K* ноктасы *ABC* өчпочмагының *AC* ягында ята. *ABK* һәм *KBC* өчпочмакларының мәйданнары 1 : 3 чагыштырмасында һәм $BC = 10$ см. Әгәр $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$ булса, *AC* ягын табыгыз.
2. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе 18 мм, ә биссектрисасы аның ягын, нигез янындагысы 12 мм тигез булырлык итеп, кисемтәләргә бүлә. Өчпочмакның периметрын табыгыз.

М—16



Рәс. 21

1. 21 нче рәсемдә сурәтләнгән ABC һәм DEC өчпочмаклары охшаш, ә $DE \nparallel AB$, $AD = 3$ см, $DC = 5$ см, $BC = 7$ см. CE ны табыгыз.
2. Ике охшаш өчпочмакның мәйданнары 50 дм^2 һәм 32 дм^2, периметрлары суммасы 117 дм. Һәр өчпочмакның периметрын табыгыз.

М—17

1. $ABCD$ параллелограммының DC (C ноктасы артында) һәм BA (A ноктасы артында) якларының дәвамында тиңдәшле рәвештә K һәм E нокталары алынган. KE турысы BC ягын M ноктасында, ә AD ягын F ноктасында кисеп үтә. $AE \cdot MC = KC \cdot AF$ икәнлеген исбатлагыз.
2. $ABCD$ трапециясенең диагональләре O ноктасында кисешәләр. BOC һәм AOD өчпочмакларының периметрлары $2:3$ чагыштырмасында, $AC = 20$. AO һәм OC кисемтәләренең озынлыкларын табыгыз.

М—18

1. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында BE һәм B_1E_1 — биссектрисалар, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AE}{EC} = \frac{A_1E_1}{E_1C_1}$. $\Delta ABE \backsim \Delta A_1B_1E_1$ икәнен исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. E ноктасы AB ягында ята. Өчпочмакның эчендә $MB = 5\frac{1}{4}$, $ME = 4\frac{1}{2}$, $AE = 1$ булырлык итеп M ноктасы алынган. BM турысы AC ягын P ноктасында кисеп үтә. ΔAPB тигезьянлы икәнлеген исбатлагыз.

М—19

1. $ABCD$ — параллелограмм. AD һәм BC якларында A һәм B түбәләреннән тигез AQ һәм BP кисемтәләре салынган, E һәм F — $ABPQ$ һәм $QPCD$ дүртпочмакларының диагональләре кисешү нокталары. $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC$ икәнен исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $BC = 9$. Өчпочмакның медианалары O ноктасында кисешәләр, $OB = 10$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—20

1. $ABCD$ ромбының диагональләре O ноктасында кисешәләр, $AC : BD = 3 : 2$, $OE \perp AB$. AEO өчпочмагының мәйданы 27 см^2. Ромбның мәйданын табыгыз.
2. Тигезьянлы ABC өчпочмагында ($AB = CB$) BD — биссектриса, $DE \perp AB$, $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{9}$, $BD + AC = 14$. ABC өчпочмагының периметрын табыгыз.

М—21

1. A почмагы, якларының чагыштырмасы $AB : AC = 1 : 3$ һәм медианалары кисешү ноктасыннан B түбәсенә кадәр булган ераклыгы буенча ABC өчпочмагын төзегез.
2. a һәм b кисемтәләре бирелгән. $x = \frac{(a+b)b}{a}$ кисемтәсен төзегез.

М—22

1. $ABCD$ трапециясендә ($AD \parallel BC$) $AB = 12$, $BD = 16$, $AD = 20$, $CE \perp BD$ икәне билгеле. BCE почмагының синусын, косинусын, тангенсын табыгыз.
2. Ромбның мәйданы $4\sqrt{2}$ гә, ә ягы $2\sqrt{2}$ гә тигез. Ромбның почмакларын табыгыз.

М—23

1. $ABCD$ трапециясендә ($AD \parallel BC$) $AD = 2a$, $BC = a$, $BD \perp AB$, $\angle CBD = \alpha$ икәне билгеле. Трапециянең мәйданын табыгыз. Әгәр $a = 7{,}6$, $\alpha = 54°21'$ булса, мәйданны исәпләгез.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) CD — медиана. Әгәр $CD = 5{,}3$, $BC = 4{,}7$ булса, DCB почмагын табыгыз.

М—24*

1. Тигезьянлы ABC өчпочмагына ($AB = BC$), туры почмагының түбәсе бирелгән өчпочмакның нигезендә ятарлык, ә гипотенузасы нигезгә параллель (кысынкы почмакларының түбәләре өчпочмакның ян якларында ята) булырлык итеп, тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак камалган. Әгәр BF биеклеге 16 см, ә $AB = 20$ см булса, турыпочмаклы өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) BD — биссектриса, ABD һәм BCD өчпочмакларының мәйданнары $17 : 8$ чагыштырмасында. ABC почмагының синусын табыгыз.

M—25

1. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының ($\angle C = 90°$) катетлары $AC = 3$, $BC = 4$. Үзәге C ноктасында булган әйләнәнең радиусы 2,4 кә тигез. Бу әйләнә белән AB турысының үзара торышын ачыклагыз.
2. Әйләнәгә орынмада орыну ноктасы P ның ике ягына PA һәм PB кисемтәләре салынган. A һәм B нокталары әйләнәнең үзәге O белән кисемтәләр ярдәмендә тоташтырылган. AO әйләнәне C ноктасында, ә BO D ноктасында кисә. Әгәр әйләнәнең радиусы 7 гә тигез, ә $OA = OB = 25$ булса, CD ны табыгыз.

M—26

1. KA һәм KB — үзәге O ноктасында булган әйләнәнең хордалары, $\angle AKB = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$. Бу әйләнә радиусының озынлыгын табыгыз.
2. ABC тигезьянлы өчпочмагында $AC = CB$. Диаметр буларак AC ягында AB ягын D ноктасында кисеп үтүче әйләнә төзелгән, $CD = 18$, $AD = 16$. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.

M—27

1. Үзәге O ноктасында булган әйләнәнең диаметры CD AB хордасы белән K ноктасында кисешә, $OK = 5$ см. Әйләнәнең үзәгеннән хордага кадәр ераклык 4 см га тигез. Хорданың озынлыгы 16 см га тигез булса, әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Циркуль һәм линейка ярдәмендә озынлыгы $\sqrt{2 \cdot 3}$ см га тигез булган кисемтә төзегез.

M—28*

1. Радиуслары 4 һәм 6 булган ике әйләнә тышкы яктан орыналар. Аларның уртак тышкы орынмалары M ноктасында кисешә. M ноктасыннан кечерәк әйләнәнең үзәгенә кадәр ераклыкны табыгыз.
2. Әйләнәдә $AB \parallel DE$ һәм $AC \parallel DF$ булырлык итеп, AB һәм AC, DE һәм DF хордалары үткәрелгән. $FB \parallel CE$ икәнен исбатлагыз.

М—29

1. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында h һәм p — BC һәм AC якларына урта перпендикулярлар. Алар F ноктасында кисешәләр, $CF = 10$, $AB = 16$. F ноктасыннан AB ягына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. ABC өчпочмагының түбәләре әйләнәдә яталар. $\angle A = 2\angle B$. AF һәм CE биссектрисалары O ноктасында кисешәләр, ә AO әйләнәне K ноктасында кисеп үтә. $KC \parallel AB$ икәнен исбатлагыз.

М—30

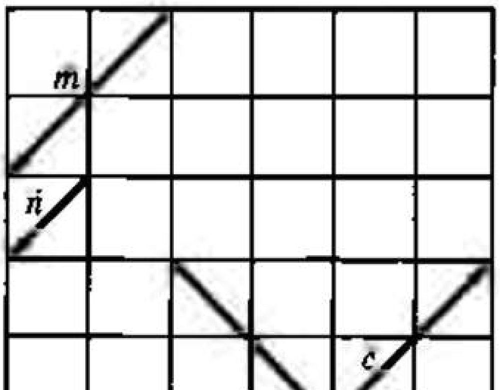
1. Турыпочмаклы өчпочмакка әйләнә камалган. Гипотенуза белән орыну ноктасы аны 6 см һәм 4 см лы ике өлешкә бүлә. Әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Әгәр трапециянең нигезләре 8 см һәм 2 см га тигез икәне билгеле булса, тигезьянлы трапециягә камалган әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—31

2. Җәенке почмаклы тигезьянлы өчпочмакның нигезе 24 см га, ә аны камаган әйләнәнең радиусы 13 см га тигез. Өчпочмакның ян ягын табыгыз.
3. Тигезьяклы ABC өчпочмагының ягы $\sqrt{3}$ см. Өчпочмакның AD һәм BE биеклекләре M ноктасында кисешәләр. $MDCE$ дүртпочмагын әйләнә белән камарга мөмкин булуын исбатлагыз һәм аның радиусын табыгыз.

М—32

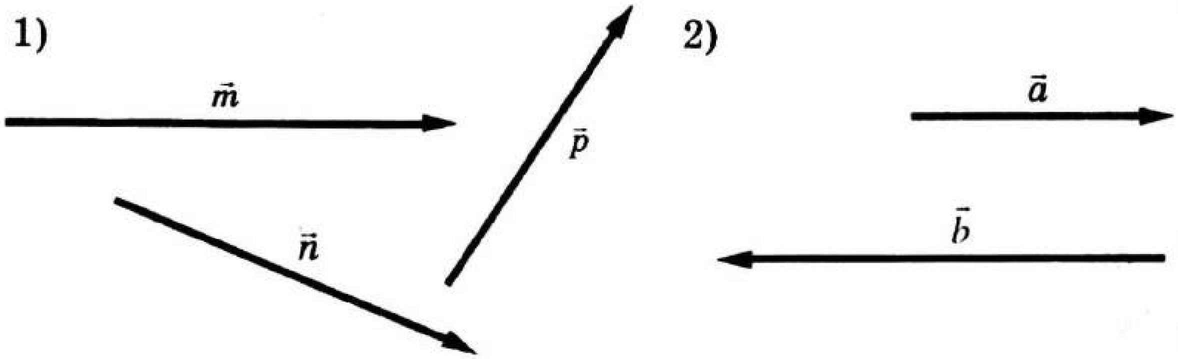
1. $ABCD$ — турыпочмаклык. Түбәндәге язмаларның кайсының мәгънәсе бар:
   а) $\overline{AD} < \overline{AC}$; в) $\overline{AC} = \overline{BD}$;
   б) $|\overline{AD}| < |\overline{AC}|$; г) $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$?
2. 22 нче рәсемдә сурәтләнгән векторларның кайсылары:
   а) коллинеар;
   б) бердәй юнәлешле;
   в) капма-каршы юнәлешле;
   г) тигез озынлыкка ия?
   Бу векторларны бер ноктадан салыгыз.



Рәс. 22

М—33

1. 23 нче рәсемдә $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары сурәтләнгән.
   1) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$ суммасын төзегез.
   2) $\vec{a} + \vec{b}$ суммасын төзегез.

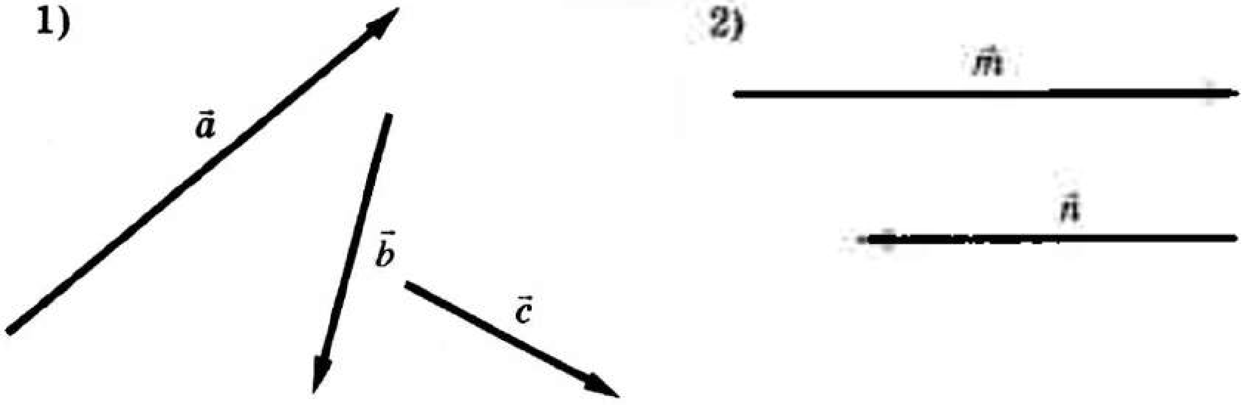


Рәс. 23

2. *ABCD* турыпочмаклыгының диагональләре *O* ноктасында кисешә.
   $|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$ булуын исбатлагыз.

М—34

1. 24 нче рәсемдә $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ векторлары сурәтләнгән.
   1) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ векторын төзегез.
   2) $\vec{n} - \vec{m}$ векторын төзегез.



Рәс. 24

2. *ABCD* параллелограммында $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}$. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ векторларын $\vec{a}$ һәм $\vec{d}$ векторлары аша күрсәтегез.
3. *ABCD* ромбында $AD = 20$, $BD = 24$, *O* — диагональләр кисешү ноктасы. $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB}|$ ны табыгыз.

М—35

1. ABC өчпочмагы бирелгән. $-3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB})$ векторын төзегез.
2. $MHKC$ ромбының HK ягында, $KE = \frac{1}{5}HE$ булырлык итеп, E ноктасы алынган. T — MH ягының уртасы. $\overrightarrow{CE}$ һәм $\overrightarrow{ET}$ векторларын $\overrightarrow{CK} = \vec{p}$ һәм $\overrightarrow{CM} = \vec{a}$ векторлары аша күрсәтегез.

М—36

1. BA һәм CD кисемтәләре, $AO = 2OB$ һәм $OD = 2OC$ булырлык итеп, O ноктасында кисешәләр. Векторларны кулланып, $BC \parallel AD$ һәм $BC = \frac{1}{2}AD$ булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагы бирелгән. A_1, B_1, C_1 нокталары тиңдәшле рәвештә BC, AC, AB якларының урталары. O — яссылыкта ирекле алынган нокта булса, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ икәнен исбатлагыз.

М—37

1. $MHKP$ трапециясендә (MP һәм HK — нигезләр) $\angle M = 90°$, $\angle K = 150°$, $HK = 2$ см. Диагонале ян ягына перпендикуляр икәне билгеле булса, трапециянең урта сызыгын табыгыз.
2. Тигезьянлы трапециянең кысынкы почмаклары 45° ка, кечерәк нигезе 5 см га, ә биеклеге 4 см га тигез. Трапециянең урта сызыгын һәм зуррак нигезен табыгыз.

М—38

$ABCD$ турыпочмаклыгында AB ягын M ноктасы A түбәсеннән башлап 2 : 1 чагыштырмасында бүлә. MD һәм BC турылары E ноктасында кисешәләр, $\angle MDA = 40°$, $AD = 10$ см.

а) AMD һәм ECD өчпочмакларының охшаш булуын исбатлагыз.

б) Микрокалькулятор ярдәмендә DCE өчпочмагының мәйданын исәпләгез.

М—39

1. AB һәм AD — радиусы 5 см булган нинди дер әйләнәгә орынмалар (B һәм D — орыну нокталары). C ноктасы BD дугаларының зуррагыныкы. Әгәр $AB = 5$ см булса, $\angle BCD$ ны табыгыз.
2. Нинди дер трапециянең почмакларының берсе туры, ә икенчесе 30° ка тигез. Аның зуррак ян ягы 12 см. Әгәр трапеция белән әйләнә камарга мөмкин булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—1

1. Кабарынкы $ABCDEF$ алтыпочмагының барлык яклары да тигез. A түбәсеннән үткәрелгән зуррак диагонале BC ягына параллель һәм $\angle BAD = \angle CDA$. $ABDEF$ һәм $ACDEF$ бишпочмакларының периметрларын чагыштырыгыз.
2. Кабарынкы $2n$-почмаклыкның почмаклары кабарынкы n-почмаклыкның почмаклары суммасыннан k тапкырга зуррак, монда k — так сан. k ны табыгыз.

М—2

1. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$. Дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасы O аша BC һәм AD якларын тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталарында кисүче туры үткәрелгән; $\angle BOM = 90°$. $BK = BM$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ параллелограммының BC һәм CD якларында, BH һәм MD кисемтәләре O ноктасында кисешерлек итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм H нокталары билгеләнгән; $\angle BHD = 95°$, $\angle DMC = 90°$, $\angle BOD = 155°$. Параллелограммның почмакларын, AB һәм MD кисемтәләре озынлыкларының чагыштырмасын табыгыз.

М—3

1. M һәм K нокталары тиңдәшле рәвештә ABC өчпочмагында AB һәм BC якларының урталары булсын. Өчпочмакның тышкы ягында C түбәсе аша AB ягына параллель һәм MK нурын E ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. $KE = \frac{1}{2}AC$ икәнен исбатлагыз.
2. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагының BC һәм AD якларында, AM һәм BK, KC һәм MD кисемтәләре парларының урталары уртак булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары алынган. $\angle BAD = \angle BCD$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясенең җәенке почмагы түбәсеннән зуррак нигезе булган AD турысына CE перпендикуляры үткәрелгән. $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ булуын исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең диагональләре үзара перпендикуляр. Зуррак диагонале кечерәк ян ягы белән 60° лы почмак төзи. Кечерәк диагональнең трапеция нигезләренең ярымсуммасына тигез булуын исбатлагыз.

М—5

1. Диагонале, ягы, шул як һәм аңа каршы ягы булган турылар арасындагы ераклыкка тигез булган кисемтә буенча параллелограмм төзегез.
2. Кысынкы почмагы, диагонале һәм кысынкы почмакның түбәсеннән трапециянең кечерәк нигезен тәшкил итүче турыга төшерелгән перпендикуляр буенча тигезьянлы трапеция төзегез.

М—6

1. $ABCD$ турыпочмаклыгында M һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә AB һәм AD якларының урталары. AC турысында — P ноктасы, BD турысында E ноктасы алынган, $MP \perp AC$, $KE \perp BD$. $4KE = AD$ икәне билгеле. $AP : PC$ чагыштырмасын табыгыз.
2. Тигезьянлы ABC өчпочмагының AC нигезендә — P ноктасы, ә AB һәм BC якларында тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары алынган. $AM = CK$, $2MK = AC = 4AP$. PMK почмагын табыгыз.

М—7

1. $ABCD$ ромбында B почмагы җәенке. AD ягында K ноктасы алынган, $BK \perp AD$. BK һәм AC турылары O ноктасында кисешә, $AC = 2BK$. AOB почмагын табыгыз.
2. $ABCD$ квадратының BC һәм CD якларында тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары билгеләнгән, $MC = KD$. DM һәм AK кисемтәләре O ноктасында кисешә, $2OM = AM$. AMO почмагын табыгыз.

М—8

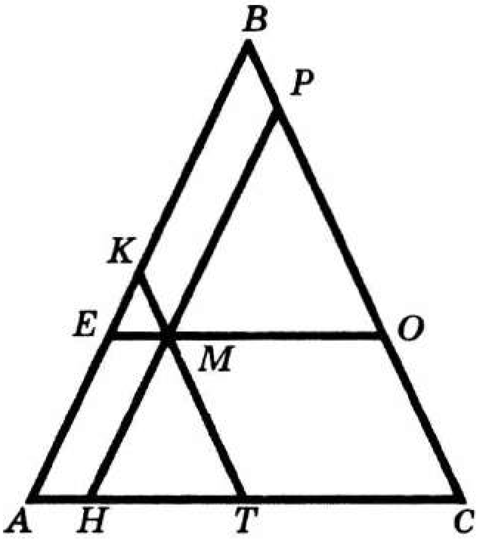
1. Ягы белән диагонале арасындагы почмагы һәм турыпочмаклыкның түбәсеннән бирелгән диагональне тәшкил итүче турыга төшерелгән перпендикуляр буенча турыпочмаклык төзегез.
2. ABC өчпочмагының AE биссектрисасына тигез булган PQ кисемтәсе буенча $ABCD$ квадратын төзегез.

М—9

1. $ABCD$ параллелограммының AB ягында, $DE \perp AB$ булырлык итеп, E ноктасы билгеләнгән. $ABCD$ параллелограммының мәйданы $DE \cdot AB$ га тигез булуын исбатлагыз.
2. Ромбның мәйданы, аның диагональләре тапкырчыгышының яртысына тигез булуын исбатлагыз.

М—10

1. Параллелограммның җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биекләре 45° лы почмак төзиләр. Биекләрнең берсе төшкән ягын, кысынкы почмак түбәсеннән санаганда, 2 см һәм 8 см га тигез булган кисемтәләргә бүлә. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
2. 25 нче рәсемдә нигезе AC булган ABC тигезьянлы өчпочмагы күрсәтелгән. $KT \parallel BC$, $MP \parallel AB$, $EO \parallel AC$. $AEMH$ һәм $MOCT$ дүртпочмакларының мәйданнары $BP : BK$ чагыштырмасында булуын исбатлагыз.



Рәс. 25

М—11

1. $ABCD$ параллелограммының эчендә M ноктасы билгеләнгән. AMD һәм BMC өчпочмакларының мәйданнары суммасы параллелограмм мәйданының яртысына тигез булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында $\angle C = 90°$, AC, AB, BC якларында, $CMPK$ дүртпочмагы квадрат булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M, P, K нокталары алынган, $AC = 6$ см, $BC = 14$ см. MC ягын табыгыз.

М—12

1. AD — $ABCD$ трапециясенең зуррак нигезе, $\angle D = 60°$. C һәм D почмакларының биссектрисалары O ноктасында кисешә. $OD = a$, $BC = b$, $AD = c$. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. MK — $MPHK$ трапециясенең зуррак нигезе. MHK һәм KHP өчпочмакларының мәйданнары тиңдәшле рәвештә S_1 һәм S_2 гә тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Диагональләре үзара перпендикуляр булган тигезьянлы трапециянең ян ягы 26 см га тигез. Җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклеге зуррак нигезен кечерәге 24 см га тигез булган ике кисемтәгә бүлә. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Трапециянең ян яклары 9 см һәм 12 см га, ә нигезләре 30 см һәм 15 см га тигез. Ян якларының дәвамнарыннан төзелгән почмакны табыгыз.

М—14

1. Өчпочмакның ике почмагы 105° һәм 45°, ә мәйданы $(\sqrt{3}+1)$ см². Өчпочмакның кечерәк биеклеген табыгыз.
2. Ромбның диагонале аның ягы белән диагональләре кисешү ноктасы арасындагы ераклыктан дүрт тапкыр зуррак. Әгәр ягы 2 см га тигез булса, ромбның мәйданын табыгыз.

М—15

1. AB һәм EK кисемтәләре бирелгән. C һәм M нокталары тиңдәшле рәвештә AB һәм EK кисемтәләрендә яталар. AC, CB һәм EM, MK — пропорциональ кисемтәләр. $AB \cdot MK = CB \cdot EK$ булуын исбатлагыз.
2. ABC — турыпочмаклы өчпочмак ($\angle C = 90°$), $D \in AC$ һәм $E \in AB$, ә $DE \parallel BC$ һәм $DE = DC$, $AE = 15$ мм, $EB = 20$ мм икәне билгеле. ABC өчпочмагының периметрын табыгыз.

М—16

1. AC диагонале $ABCD$ трапециясен ике охшаш ABC һәм ACD өчпочмакларына бүлә, $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. AC ны табыгыз.
2. ABC өчпочмагының AC ягына параллель булган DE турысы яклары бирелгән өчпочмакның якларыннан 3 тапкыр кечерәк булган DBE өчпочмагын кисеп ала. Әгәр ABC өчпочмагының мәйданы 27 см² булса, $ADEC$ трапециясенең мәйданын табыгыз.

М—17

1. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында BD һәм AE — биекләкләр. $DC \cdot AC = EC \cdot BC$ булуын исбатлагыз.
2. K ноктасы $ABCD$ трапециясенең (AD һәм BC — нигезләр) CD ягында ята, шул ук вакытта $CK : KD = 1 : 2$. AK O ноктасында BD ны кисеп үтә. Әгәр $BC : AD = 1 : 2$ булса, $BO = OD$ булуын исбатлагыз.

М—18

1. $ABCD$ трапециясенең нигезләре $AD = a$, $BC = b$, $AC = \sqrt{ab}$. $\angle BAC = \angle ADC$ икәнлеген исбатлагыз.
2. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмакларында $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ һәм $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ булуын исбатлагыз.

М—19

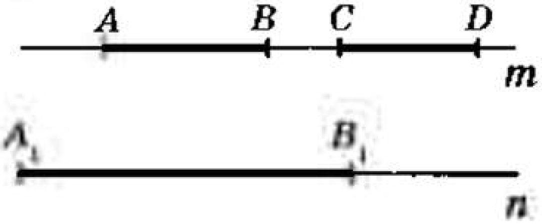
1. $ABCD$ дүртпочмагында M, N, P, Q нокталары — тиңдәш рәвештә AB, BC, CD, DA якларының урталары. MP һәм NQ кисемтәләренең кисешү ноктасында уртага бүленүен исбатлагыз.
2. $ABCD$ параллелограммында F ноктасы — BC ягының уртасы. AF E ноктасында BD ны кисеп үсә, CE K ноктасында AB ны кисеп үтә; $KB = 5$, $AD = 12$, $\angle A = 30°$. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

М—20

1. $ABCD$ турыпочмаклыгында $BE \perp AC$, $AE : EC = 1 : 3$. Турыпочмаклыкның яклары белән диагонале арасындагы почмакларны табыгыз.
2. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) $BE \perp AD$, $BC : AD = 1 : 2$, $BE : ED = 3 : 4$. ABE өчпочмагының мәйданы 18 см^2 га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—21

1. Кысынкы почмаклы өчпочмакның эченә бер ягы икенчесеннән ике тапкыр зуррак булган турыпочмаклыкны зуррак ягы өчпочмакның бер ягында, ә ике түбәсе өчпочмакның калган ике ягында ятарлык итеп камагыз.
2. 26 нчы рәсемдә $m \parallel n$. n турысында бары тик линейка ярдәмендә, $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ булырлык итеп, C_1D_1 кисемтәсе төзегез.



Рәс. 26

М—22

1. Турыпочмаклы ACB өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $CE \perp AB$, CD — медиана, $AB = 4$, $ED = \sqrt{3}$. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = BC = 5$, $AC = 6$. ABC почмагының синусын, косинусын, тангенсын табыгыз.

M—23

1. Турыпочмаклы өчпочмакның мәйданы S, кысынкы почмакларының берсе α. Гипотенузага төшерелгән биеклекне табыгыз. Әгәр $S = 42{,}3$ һәм $\alpha = 50°27'$ булса, биеклекнең озынлыгын табыгыз.
2. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясендә ($\angle D = \angle C = 90°$) $\angle BAD = 40°27'$, $AB = 12{,}7$, $AC = 18{,}1$. CAD почмагын табыгыз.

M—24*

1. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы 4 кә, ә почмагы 30° ка тигез. Бу өчпочмакка бер ягы икенчесеннән ике тапкырга зуррак булган турыпочмаклык камалган. Әгәр зуррак ягы өчпочмакның гипотенузасында, ә ике түбәсе катетларында ятса, турыпочмаклыкның мәйданын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында ACB җәенке почмак, $BO \perp AC$, $OF \perp AB$, $OD \perp BC$. $\angle ACB = \angle DFB$ булуын исбатлагыз.

M—25

1. $ABCD$ трапециясендә $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$. Үзәге A ноктасында булган AB радиуслы әйләнә үткәрелгән. Бу әйләнә белән BD турысының үзара торышы нинди?
2. Ноктадан әйләнәгә үзара α почмагы ясаучы ике орынма үткәрелгән. Әйләнәнең радиусы r га тигез. Орыну нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

M—26

1. Әйләнәнең AB диаметрында ирекле C ноктасы билгеләнгән. CB кисемтәсе диаметр булырлык итеп әйләнә төзелгән. BE һәм BF — кечерәк әйләнәне тиңдәшле рәвештә P һәм K нокталарында кисеп үтүче зуррак әйләнә хордалары.
$\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$ булуын исбатлагыз.
2. A ноктасында әйләнәгә AB орынмасы уздырылган. AC — бу әйләнәнең хордасы, $\angle BAC$ — кысынкы, $\cup AM = \cup MC$ (M ноктасы AC дугасында ята һәм BAC почмагының эчке өлкәсендә урнашкан). M ноктасыннан AC га кадәр ераклык 5 см га тигез. M ноктасыннан AB га кадәр булган ераклыкны табыгыз.

М—27

1. AB — үзәге O ноктасында булган әйләнәнең диаметры. Диаметр буларак OB кисемтәсендә үзәге O_1 булган әйләнә төзелгән. Зуррак әйләнәнең BC хордасы кечерәк әйләнәне E ноктасында кисә. O_1 һәм E нокталары аша туры үткәрелгән, ул зуррак әйләнәне K һәм F (K — E — F) нокталарында кисеп үтә, $KE = 2$ см, $EF = 8$ см. BC ны табыгыз.
2. Ике әйләнә A һәм B нокталарында кисешәләр. Аларның уртак AB хордасының дәвамында M ноктасы сайлап алынган. Бу ноктадан әлеге әйләнәләргә ME һәм MF орынмалары үткәрелгән (E һәм F — орыну нокталары). $ME = MF$ булуын исбатлагыз.

М—28*

1. Радиуслары 1 һәм 3 булган ике әйләнә C ноктасында тышкы яктан орына; AB аларның уртак тышкы орынмасы (A һәм B — орыну нокталары). ACB өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагының A, B, C түбәләре үзәге O ноктасында булган әйләнәдә яталар; $AH \perp BC$. $\angle OAC = \angle BAH$ булуын исбатлагыз.

М—29

1. ABC өчпочмагында $\angle ACB = 120°$, $AC = CB = a$. AC һәм CB якларының урта перпендикулярлары M ноктасында кисешәләр. M ноктасыннан AB ягының уртасына кадәр булган ераклыкны табыгыз.
2. Үзәге O ноктасында булган әйләнәгә M ноктасыннан MA һәм MB орынмалары үткәрелгән (A һәм B — орыну нокталары), $BF \perp AM$. BF K ноктасында MO ны кисеп үтә, $MO = 2OB$. KAB почмагын табыгыз.

М—30

1. Почмагы 60° ка тигез булган турыпочмаклы өчпочмакның эченә радиусы $2\sqrt{3}$ булган әйләнә камалган. Бу өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Турыпочмаклы трапециягә камалган әйләнәнең үзәгеннән зуррак ягының очларына кадәр ераклык 6 см һәм 8 см. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—31

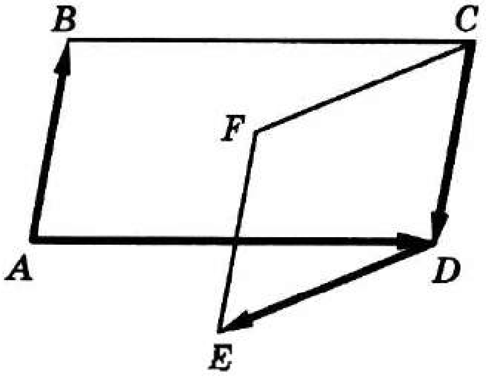
1. Нигезе AB һәм түбәсе янындагы почмагы $120°$ булган тигезьянлы ABC өчпочмагы әйләнә белән камалган. Камаучы әйләнәнең үзәген өчпочмакның биеклекләре дәвамнарының кисешү ноктасы белән тоташтыручы кисемтәнең озынлыгы камаучы әйләнәнең диаметрына тигез булуын исбатлагыз.
2. Трапеция әйләнә белән камалган. Аның нигезләре 6 дм һәм 8 дм, биеклеге 1 дм. Әгәр трапециянең нигезләре әйләнә үзәгеннән бер якта ятсалар, бу әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—32

1. $ABCD$ дүртпочмагында $\overline{AB} = \overline{DC}$. Диагональләренең кисешү ноктасы O аша BC һәм AD якларын тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталарында кисеп үтүче туры үткәрелгән. $\overline{AE}, \overline{EC}, \overline{AF}, \overline{DF}$ векторларының кайсылары:
   а) коллинеар;
   б) бердәй юнәлешле;
   в) капма-каршы юнәлешле;
   г) тигез;
   д) тигез озынлыкка ия?
2. Түгәрәктә AC диаметры һәм AB хордасы үткәрелгән. Түгәрәк эчендә M ноктасы сайлап алынган. Бу ноктадан тиңдәшле рәвештә $\overline{AB}$ һәм $\overline{AC}$ векторларына тигез булган $\overline{MN}$ һәм $\overline{MF}$ векторлары салынган. MNF почмагы күпмегә тигез?

М—33

1. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$ векторлары арасындагы почмак $120°$ ка тигез, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ булуын исбатлагыз.
2. 27 нче рәсемдә $ABCD$ һәм $CFED$ параллелограммнары бирелгән. $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{CD} + \vec{x} = \overline{AD}$ булырлык $\vec{x}$ векторын күрсәтегез.



Рәс. 27

М—34

1. $\overline{AB}$ векторын $\overline{AC}, \overline{DC}, \overline{BD}$ векторларының алгебраик суммасы рәвешендә күрсәтегез.
2. $ABCD$ параллелограммы һәм ирекле O ноктасы бирелгән. $\overline{OA}$ векторын $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ векторлары аша күрсәтегез.
3. Туры почмагы A булган $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) AC диагонале үткәрелгән. $\angle BCA = 45°$, $\angle ACD = 90°$, $AC = a$. $|\overline{CB} - \overline{CA} + \overline{CD}|$ ны табыгыз.

M—35

1. $\overline{OM} = \frac{3}{4}\overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{OB}$ булырлык итеп O, A, M, B нокталары бирелгән. A, M, B нокталарының бер турыда ятуын исбатлагыз.
2. M ноктасы — $ABCD$ параллелограммының AC диагоналендә, ә H ноктасы AD ягында ята, шул ук вакытта $AM : MC = 2 : 1$ һәм $AH = HD$. $\overline{MH}$ векторын $\bar{a}$ һәм $\bar{p}$ векторлары аша күрсәтегез, биредә $\bar{a} = \overline{AB}$ һәм $\bar{p} = \overline{AD}$.

M—36

1. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммнар. M, P, F, H нокталары — тиңдәшле рәвештә AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кисемтәләренең урталары. M, P, F, H нокталарының параллелограмм түбәләре булуын яисә бер турыда ятуын исбатлагыз.
2. Әгәр ABC өчпочмагында M — медианалар кисешү ноктасы, ә O яссылыкның ирекле ноктасы булса, $OM \leq \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$ икәнен исбатлагыз.

M—37

1. Тигезьянлы трапециянең 4 см лы диагонале нигезе белән 60° лы почмак төзи. Трапециянең урта сызыгын табыгыз.
2. Әгәр трапецияне ике туры ярдәмендә өч тигезьяклы өчпочмакка бүләргә мөмкин булса, трапециянең урта сызыгы аның кечерәк нигезеннән 1,5 тапкыр зуррак булганын исбатлагыз.

M—38

$ABCD$ ромбында $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см. AB һәм CD якларында тиңдәшле рәвештә, $AM : MB = CK : KD = 1{,}5$ булырлык итеп, M һәм K нокталары билгеләнгән.

а) $MBKD$ дүртпочмагының турыпочмаклык булуын исбатлагыз.

б) Аның периметрын һәм мәйданын табыгыз.

M—39

1. AB һәм AC — үзәге O булган әйләнәгә орынмалар (C һәм B — орыну нокталары). Әгәр әйләнә үзәгеннән A ноктасына кадәр ераклык 8 см, ә BC хордасына кадәр 6 см булса, BC дугасының кечерәгенең градуслы үлчәмен табыгыз.
2. Нигезләре 10 см һәм 24 см, ә биеклеге 17 см булган тигезьянлы трапецияне камаучы әйләнәнең үзәге кайда урнашкан: трапециянең нигезендәме әллә нигезендә түгелме?

6 нчы вариант

М—1

1. $ABCDE$ кабарынкы бишпочмагының барлык яклары да бертигез озынлыкта. A түбәсеннән үткәрелгән диагонале ED ягына параллель һәм $\angle EAC = \angle DCA$. $EABC$ һәм $DCBA$ дүртпочмакларының периметрларын чагыштырыгыз.
2. Кабарынкы n-почмаклыкның почмаклары суммасы кабарынкы $n-1$-почмаклыкның почмаклары суммасыннан k тапкыр зуррак (k — натураль сан). k ны табыгыз.

М—2

1. $MPKH$ кабарынкы дүртпочмагында $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. MH һәм PK якларында, $PB = PA$ булырлык итеп, A һәм B нокталары билгеләнгән. AB кисемтәсе дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасы аша уза. $HP \perp AB$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ параллелограммының BC һәм CD якларында тиңдәшле рәвештә K һәм M нокталары алынган. BM һәм KD кисемтәләре O ноктасында кисешәләр, $\angle BOD = 140°$, $\angle DKB = 110°$, $\angle BMC = 90°$. MC һәм AD кисемтәләренең озынлыклары чагыштырмасын һәм параллелограммның почмакларын табыгыз.

М—3

1. A һәм B нокталары тиңдәшле рәвештә PET өчпочмагының PE һәм ET якларында яталар. Өчпочмакның тышкы ягында T түбәсе аша үтүче туры AB нурын K ноктасында кисә, $AP = KT$, $AB = BK = \frac{1}{2}PT$. A ноктасы PE кисемтәсенең уртасы булуын исбатлагыз.
2. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагының BC ягында M ноктасы, ә дүртпочмакның тышкы ягында, AK һәм BM, KD һәм MC кисемтәләре парларының урталары уртак булырлык итеп, K ноктасы билгеләнгән. $\angle ABC = \angle ADC$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясенең диагональләре үзара перпендикуляр. Нигезләрне тәшкил итүче AD һәм BC турылары арасындагы ераклык $\frac{1}{2}(AD + BC)$ га тигез булуын исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы трапециянең кечерәк нигезенең туры почмагы түбәсеннән, бу нигезгә $45°$ почмак ясап, зуррак ян ягының уртасыннан узучы нур үткәрелгән. Трапециянең нигезләре суммасы аның кечерәк ягына тигез булуын исбатлагыз.

М—5

1. Ике диагональ һәм бер диагональнең ахырыннан икенче диагональне тәшкил итүче турыга төшерелгән перпендикуляр буенча параллелограмм төзегез.
2. Диагонале җәенке почмакны бүлгәндә килеп чыккан ике почмак һәм трапециянең нигезләрен тәшкил итүче турылар арасындагы ераклыкка тигез булган кисемтә буенча тигезьянлы трапеция төзегез.

М—6

1. *MPKH* турыпочмаклыгының диагональләре *O* ноктасында кисешә. *A* һәм *B* нокталары — тиңдәшле рәвештә *MP* һәм *MH* якларының урталары. *C* ноктасы *MK* кисемтәсен *M* ноктасыннан башлап 1: 7 чагыштырмасында бүлә; $AC \perp MK$. $BO : PH$ чагыштырмасын табыгыз.
2. Тигезьянлы *MPK* өчпочмагының *MK* нигезенә параллель булган ниндидер туры *MP* һәм *PK* якларын тиңдәшле рәвештә *B* һәм *C* нокталарында кисеп үтә. *A* ноктасы *MK* кисемтәсен *M* ноктасыннан башлап 1 : 3 чагыштырмасында бүлә; $BC = 2\ AM$. *MAB* почмагын табыгыз.

М—7

1. *MPHK* ромбында *M* кысынкы почмак. *PE* кисемтәсе *MK* турысына перпендикуляр, *O* — диагональләр кисешү ноктасы, *T* — *PE* һәм *MH* турыларының уртак ноктасы, $\angle MTP = 120°$, $OH = a$. *PE* ны табыгыз.
2. *ABCD* квадратының *AB*, *BC*, *CD* якларында тиңдәшле рәвештә *M*, *K*, *P* нокталары билгеләнгән, $MP \perp AK$. *MP* һәм *AK* кисемтәләрен чагыштырыгыз.

М—8

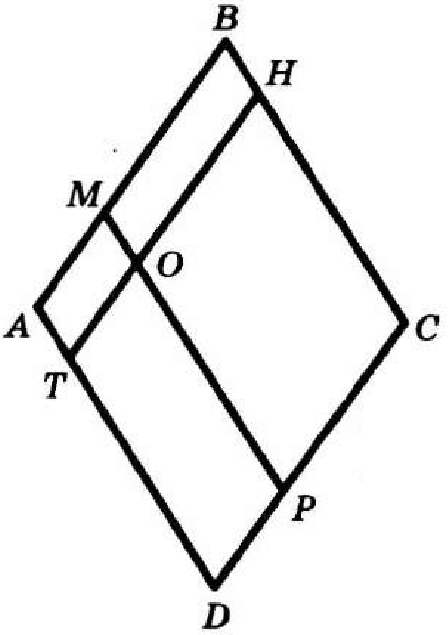
1. Кысынкы почмагы һәм озынлыгы ромбның капма-каршы якларын тәшкил итүче турылар арасындагы ераклыкка тигез булган кисемтә буенча ромб төзегез.
2. $PQ = BM$, $\angle hk = \angle MBD$ (*M* — *AD* кисемтәсенең уртасы) икәне билгеле булса, *PQ* кисемтәсе һәм *hk* почмагы буенча *ABCD* квадраты төзегез.

М—9

1. *ABC* өчпочмагының *AC* ягында, $BD \perp AC$ булырлык итеп, *D* ноктасы билгеләнгән. Өчпочмакның мәйданы $\frac{1}{2}BD \cdot AC$ булуын исбатлагыз.
2. Квадратның мәйданы диагонале квадратының яртысына тигез булуын исбатлагыз.

М—10

1. *BM* — *ABCD* ромбында *ABD* өчпочмагының биссектрисасы, $\angle BMD = 157°30'$. Әгәр ромбның биеклеге 10 см булса, аның мәйданын табыгыз.
2. 28 нче рәсемдә *ABCD* ромбы сурәтләнгән. Биредә $HT \parallel AB$, $MP \parallel BC$. *AMOT* һәм *OHCP* дүртпочмакларының мәйданнары тапкырчыгышы *MBHO* һәм *TOPD* дүртпочмаклары мәйданнары тапкырчыгышына тигез булуын исбатлагыз.



Рәс. 28

М—11

1. Параллелограммны диагональләре мәйданнары бер үк булган дүрт өчпочмакка бүлүен исбатлагыз.
2. Нигезләре *AD* һәм *BC* булган *ABCD* трапециясенең диагональләре *CD* турысыннан 4 см ераклыкта ятучы *O* ноктасында кисешәләр. Әгәр *CD* = 8 см булса, *AOB* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

1. *MHPK* трапециясендә *MH* = *HK*, *A* — зуррак *MK* нигезенең уртасы, ә *B* ноктасы — *MH* ягының уртасы, $BA \perp MH$, *MK* = *a*, *HP* = *b*. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. *EP* кисемтәсе *ABCD* трапециясенең *BC* һәм *AD* нигезләрен *A* һәм *E* нокталары *BC* турысының төрле ягында ятарлык һәм $EP \perp BC$ булырлык итеп кисә. Трапециянең нигезләре *EP* кисемтәсен өч тигез өлешкә бүлә. *BEC* һәм *APD* өчпочмакларының мәйданнары тиңдәшле рәвештә S_1 һәм S_2 гә тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Тигезьянлы трапециянең диагонале 25 см, ә биеклеге 15 см. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Ниндидер трапециянең диагональләре 5 см һәм 12 см, ә нигезләре 3 см һәм 10 см. Бу трапециянең диагональләре арасындагы почмакларын табыгыз.

М—14

1. Трапециянең зуррак нигезе 6 см, ә кечерәге 4 см. Зуррак нигез янындагы почмаклары $30°$ һәм $45°$. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Параллелограммның биеклекләре 6 см һәм 7,8 см, ә мәйданы 78 см^2. Кечерәк диагональнең озынлыгын табыгыз.

М—15

1. KP һәм EC кисемтәләре бирелгән. M һәм L нокталары тиңдәшле рәвештә KP һәм EC кисемтәләрендә ята. KP, MP һәм EC, LC пропорциональ кисемтәләр. $KM \cdot LC = MP \cdot EL$ булуын исбатлагыз.
2. ABC — турыпочмаклы өчпочмак ($\angle C = 90°$), $P \in AC$ һәм $K \in AB$, биредә $PK \parallel BC$ һәм $PK = KB$, $AP = 5$ дм, $PC = 4$ дм. ABC өчпочмагының периметрын табыгыз.

М—16

1. $ABCD$ трапециясендә ($AD \parallel BC$) A почмагының биссектрисасы AC трапецияне охшаш ABC һәм ACD өчпочмакларына бүлә, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Трапециянең периметрын табыгыз.
2. ABC өчпочмагының AC ягына параллель DE турысы яклары бирелгән өчпочмак якларыннан 4 тапкыр кечерәк булган DBC өчпочмагын кисеп ала. Әгәр $ADEC$ трапециясенең мәйданы 30 см^2 булса, ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—17

1. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында BD һәм AE биеклекләре O ноктасында кисешәләр. $BO \cdot OD = AO \cdot OE$ тигезлеген исбатлагыз.
2. M ноктасы $ABCD$ трапециясенең ($AD \parallel BC$) CD ягында ята, шул ук вакытта $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$. $BD \perp AM$ булуын исбатлагыз.

M—18

1. D ноктасы ABC өчпочмагының AC ягында ята, $DC = a$, $AC = b$, $BC = \sqrt{ab}$. $\angle BAC = \angle DBC$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмакларының диагональләре O һәм O_1 нокталарында кисешәләр, биредә $AO = OC$ һәм $A_1O_1 = O_1C_1$, $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$, $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$ һәм $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ икәнен исбатлагыз.

M—19

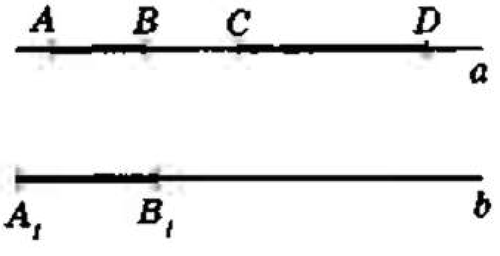
1. $ABCD$ дүртпочмагының AC һәм BD диагональләре үзара тигез. M, P, K, T нокталары — тиңдәшле рәвештә AB, BC, CD, AD якларының урталары. $MK \perp PT$ булуын исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 3 см һәм 4 см. Өчпочмакның медианалары кисешү ноктасыннан гипотенузага кадәр ераклыкны табыгыз.

M—20

1. $ABCD$ трапециясендә $AB \perp AD$, $AC \perp CD$, $BC = 6$, $AD = 8$. Трапециянең почмакларын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында $BD \perp AB$, $AB : AD = 1 : 2$, $BE \perp AD$, $AE = 4$ см. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

M—21

1. Кысынкы почмаклы өчпочмакка, туры почмагының түбәсе өчпочмагының бер ягында, ә гипотенузасы бу якка параллель булырлык һәм аның очлары өчпочмакның калган ике ягында урнашырлык итеп, тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак камагыз.
2. 29 нчы рәсемдә $a \parallel b$. Линейка ярдәмендә генә, $\frac{AB}{CD} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$ булырлык итеп, C_1D_1 кисемтәсен төзегез.



Рәс. 29

M—22

1. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $D \in AB$, $DE \parallel AC$, $DE = EC$, $\frac{BD}{DA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.
2. Ромбның диагональләре 8 см һәм 6 см. Ромбның кысынкы почмагының синусын, косинусын, тангенсын табыгыз.

М—23

1. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясендә $AB = CD$. Трапециянең мәйданы S ка тигез, $\angle BDA = \alpha$. Трапециянең биеклеген табыгыз. Әгәр $S = 234{,}6$ һәм $\alpha = 23°46'$ булса, биеклекне исәпләгез.
2. ABC өчпочмагында $BC = 2{,}7$, $AB = 4{,}2$, $\angle ACB = 132°40'$. BAC почмагын табыгыз.

М—24*

1. Ромбның эченә турыпочмаклык камалган. Турыпочмаклыкның барлык түбәләре ромбның якларында ята, һәм турыпочмаклыкның зур ягы ромбның зуррак диагоналенә параллель. Әгәр турыпочмаклыкның яклары $1 : 2$ чагыштырмасында, ромбның ягы a га, ә кысынкы почмагы $60°$ ка тигез булса, турыпочмаклыкның мәйданын табыгыз.
2. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында $BD \perp AC$, $DE \perp AB$ һәм $DF \perp BC$. $\Delta EBF \backsim \Delta ABC$ булуын исбатлагыз.

М—25

1. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясендә ($\angle CDA = 90°$) $BC = CD$, $AD = 2BC$. Үзәге D ноктасында булган BD радиуслы әйләнә үткәрелгән. Бу әйләнә белән AB турысының үзара торышы нинди?
2. Ниндидер ноктадан әйләнәгә үзара α почмагы төзүче ике орынма үткәрелгән. Әйләнәнең үзгеннән орыну нокталарын тоташтыручы хордага кадәр ераклык m га тигез. Орынмаларның бирелгән ноктадан орыну ноктасына кадәр булган кисемтәләренең озынлыгын табыгыз.

М—26

1. Әйләнәнең AB диаметрында M ноктасы билгеләнгән. Бирелгән әйләнәнең эчендә үзәкләре бу ноктада булган ике әйләнә үткәрелгән; BK һәм BK_1 — кечерәк әйләнәләргә тиңдәшле рәвештә P һәм P_1 нокталарында орынучы зуррак әйләнә хордалары. $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B_1}$ булуын исбатлагыз.
2. Тигезьянлы өчпочмакның түбәсе янындагы почмак $40°$ ка тигез. Ян ягын хорда итеп, нигезгә очында орынучы әйләнә үткәрелгән. Өчпочмакның ике түбәсе һәм башка ягының әйләнә белән кисешү ноктасы әйләнәне 3 өлешкә бүлә. Аларны табыгыз.

М—27

1. ABC өчпочмагының түбәләре әйләнәдә яталар. $AB : BC = 2 : 3$. D ноктасы AC дугасын уртага бүлә. BD AC ны E ноктасында кисеп үтә. E ноктасы аша KM хордасы үткәрелгән, $KE = 4$ см, $ME = 6$ см. AC ны табыгыз.
2. Ике әйләнә F ноктасында тыштан орына. Бу нокта аша әйләнәләргә уртак орынма үткәрелгән. Орынмада M ноктасы билгеләнгән. Бу нокта аша әйләнәләргә кисүчеләр үткәрелгән. Алар беренче әйләнәне — A һәм B ($M—A—B$) нокталарында, ә икенчесен C һәм D ($M—C—D$) нокталарында кисә, $MA = MC$. $AB = CD$ булуын исбатлагыз.

М—28*

1. Радиуслары 4 см һәм 1 см булган ике әйләнә эчтән орыналар. Зуррак әйләнәнең AB хордасы кечерәк әйләнәгә орына һәм AB турысы әйләнәгә уртак орынма белән 60° лы почмак төзи. AB ны табыгыз.
2. Ике әйләнә A һәм B нокталарында кисешәләр. A ноктасы аша, һәрберсе бер әйләнәнең хордасы булырлык һәм икенчесенә орынырлык итеп, AC һәм AD кисемтәләре үткәрелгән. $AC \cdot BA = AD \cdot BC$ булуын исбатлагыз.

М—29

1. ABC өчпочмагында ABC почмагы җәенке. AD һәм CE биеклекләренең дәвамнары M ноктасында кисешәләр, $MB = 5$, $AC = 10$. $AMCB$ дүртпочмагының мәйданын табыгыз.
2. ABC өчпочмагының эчендә аның якларыннан тигез ераклыкта O ноктасы алынган. Әгәр $\angle ABC = 2\alpha$ булса, AOC почмагын табыгыз.

М—30

1. Тигезьянлы өчпочмакка камалган әйләнә үзәгеннән өчпочмакның түбәсенә кадәр ераклык 5 см га тигез. Ягы 10 см булса, бу радиусның озынлыгын табыгыз.
2. Радиусы 2 гә тигез булган түгәрәк тирәли турыпочмаклы трапеция камалган. Трапециянең кечерәк нигезе 3 кә тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—31

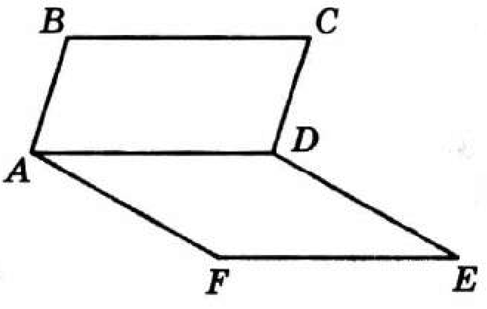
1. Тигезьянлы ABC ($AB = BC$) өчпочмагының B түбәсе янындагы почмагы 72° ка тигез. Камаучы әйләнәнең үзәге һәм A түбәсе аша BC ягы белән K ноктасында кисешкәнче туры үткәрелгән, $BK = a$. Камаучы әйләнә радиусын табыгыз.
2. $ABCD$ трапециясенә (AD һәм BC — нигезләре) радиусы 4 см булган әйләнә камалган; AC — A почмагының биссектрисасы, $\angle BCA = 30°$. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—32

1. $ABCD$ дүртпочмагында $\overline{AB} = \overline{DC}$, ә E ноктасы — BC ягының уртасы. AE турысы DC ягының дәвамын F ноктасында кисә. $\overline{AB}, \overline{BE}, \overline{CE}, \overline{AD}, \overline{CF}$ векторлары арасыннан:
   а) коллинеар;
   б) бердәй юнәлешле;
   в) капма-каршы юнәлешле;
   г) тигез;
   д) озынлыклары тигез булган векторлар парларын күрсәтегез.
2. $ABCD$ ромбында $|\overline{AC}| = 12$ см, $|\overline{BD}| = 16$ см. Ромбның A түбәсеннән $\overline{BD}$ векторына тигез булган $\overline{AE}$ векторы салынган. $\overline{EC}$ векторының озынлыгын табыгыз.

М—33

1.* $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак 90° ка, ә $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары арасындагы почмаклар 135° ка тигез, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ булуын исбатлагыз.
2. 30 нчы рәсемдә $ABCD$ һәм $ADEF$ параллелограммнары сурәтләнгән. $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AF} + \vec{y} = \overline{AF}$ тигезлеге үтәрлек $\vec{y}$ векторын күрсәтегез.



Рәс. 30

М—34

1. $\overline{AB}$ векторын $\overline{DA}, \overline{DC}, \overline{CB}$ векторларының алгебраик суммасы рәвешендә күрсәтегез.
2. $ABCD$ дүртпочмагында $\overline{OB}+\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OC}$, биредә O — яссылыкның ирекле ноктасы. $ABCD$ параллелограмм булуын исбатлагыз.
3. $PKHM$ трапециясендә (PM һәм KH — нигезләр) туры P почмагы аша HP диагонале үткәрелгән, $\angle PHK = 30°$, $\angle PHM = 90°$. Әгәр $PM = a$ булса, $|\overline{KP}+\overline{MK}-\overline{MH}|$ ны табыгыз.

М—35

1. $\overline{OE}=\frac{9}{7}\overline{OK}-\frac{2}{7}\overline{OF}$ булырлык итеп E, K, F, O нокталары бирелгән. E, K, F нокталарының бер турыда ятуын исбатлагыз.
2. T ноктасы — $ABCD$ параллелограммының BC ягында, ә E ноктасы аның BD диагоналендә ята, шул ук вакытта $BE : ED = 2 : 1$ һәм $BT = TC$. $\vec{a}=\overline{DA}$ һәм $\vec{p}=\overline{DC}$ икәне билгеле булса, $\overline{ET}$ векторын $\vec{a}$ һәм $\vec{p}$ векторлары аша күрсәтегез.

М—36

1. $ABCD$ — ирекле алынган дүртпочмак, E һәм F — тиңдәшле рәвештә AB һәм CD якларының урталары. EC, BF, AF, ED кисемтәләренең урталары параллелограммның түбәләре булуын яки аларның бер турыда ятуын исбатлагыз.
2. Векторлар кулланып, параллелограмм диагональләренең кисешүен һәм кисешү ноктасында урталай бүленүен исбатлагыз.

М—37

1. Тигезьянлы трапециядә диагональ нигез белән $45°$ лы почмак төзи. Трапециянең биеклеге 8 см га тигез. Трапециянең урта сызыгын табыгыз.
2. Бер туры ярдәмендә трапецияне ромб һәм тигезьяклы өчпочмакка бүләргә мөмкин булса, трапециянең урта сызыгы зур нигезнең $\frac{3}{4}$ ен тәшкил итүен исбатлагыз.

М—38

1. $ABCD$ параллелограммында BD диагонале BC ягына перпендикуляр. BC ягында E ноктасы сайлап алынган. AE һәм BD кисемтәләре O ноктасында кисешәләр, өстәвенә $BO : OD = 2 : 3$, $BC = 9$ см һәм $AE = 20$ см. Микрокалькулятор ярдәмендә AOD почмагы зурлыгын исәпләгез.
2. ABC өчпочмагының BC һәм AC якларында тиңдәшле рәвештә, $PC = 8$ см, $\angle HPC = \angle ABC$ булырлык итеп, H һәм P нокталары билгеләнгән. PHC һәм ABC өчпочмакларының мәйданнары $4 : 25$ чагыштырмасында, $\cos C = \frac{4}{5}$. ABC өчпочмагының BE биеклеген табыгыз.

М—39

1. BC диаметрлы әйләнәгә A ноктасыннан AC орынмасы үткәрелгән. AB кисемтәсе әйләнә белән D ноктасында кисешә, $AD = 2$ см, $BD = 6$ см. ABC өчпочмагы эчендәге әйләнә дугасының градуслы үлчәмен табыгыз.
2. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында A почмагы туры. BD диагонале BC, CD, AD яклары белән тиңдәшле рәвештә $90°$, $45°$, $30°$ лы почмаклар хасил итә. Бирелгән дүртпочмак почмакларының биссектрисалары бер ноктада кисешә аламы?

М—1

1. Күппочмакта 25 диагональ булуы мөмкинме?
2. Кабарынкы күппочмакта градуслы үлчәме 10° тан кимрәк булган ничә почмак булырга мөмкин?

М—2

1. *ABCD* параллелограммының *AD* һәм *BC* якларында тиңдәшле рәвештә *K* һәм *E* нокталары $\angle KBE = 90^\circ$ булырлык һәм *EK* кисемтәсе диагональләрнең кисешү ноктасы *O* аша узарлык итеп алынган. $BO = OE$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагының *AC* һәм *BC* якларында тиңдәшле рәвештә — *D* һәм *E* нокталары, ә өчпочмак эчендә — *M* ноктасы, *DCEM* дүртпочмагы — параллелограмм һәм $DE \parallel AB$ булырлык итеп билгеләнгән. *DM* турысы *AB* кисемтәсен — *K* ноктасында, ә *EM* турысы *H* ноктасында кисеп үтә. $AK = HB$ булуын исбатлагыз.

М—3

1. Кабарынкы *ABCD* дүртпочмагының *BC* һәм *AD* якларында тиңдәшле рәвештә *K* һәм *M* нокталары билгеләнгән. АК кисемтәсе *BD* диагонален — *P* ноктасында, ә *CM* кисемтәсен *E* ноктасында кисеп үтә. $AK \parallel CM$, $PK = EM$, $BP = ED$, $KC = AM$ булуы билгеле. $\angle BAD = \angle BCD$ булуын исбатлагыз.
2. Кабарынкы *ABCD* дүртпочмагында диагональләр *O* ноктасында кисешәләр, $BO = OD$, $AO < OC$. $\angle BAD > \angle BCD$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. Теләсә нинди трапециянең ян яклары суммасы аның зур һәм кечкенә нигезләренең аермасыннан зуррак булуын исбатлагыз.
2. Трапеция эчендә аның якларын эченә алган турылардан тигез ераклыкта урнашкан нокта булуы билгеле булса, трапеция яклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

М—5

1. Ягы, диагонале һәм бу диагональгә каршы ятучы почмагы буенча параллелограмм төзегез.
2. Ике диагонале, алар арасындагы почмагы һәм бер ян ягы буенча трапеция төзегез.

М—6

1. $ABCD$ турыпочмаклыгының AC диагоналендә E ноктасы алынган. $\angle EDC = \angle CAD = 15°$. $BE < 5ED$ булуын исбатлагыз.
2. A почмагы кысынкы булган $ABCD$ параллелограммы бирелгән. Диаметр буларак AC кисемтәсендә әйләнә төзелгән, ул DB нурын параллелограмм тышында яткан E ноктасында кисеп үтә; $\angle BAE + \angle BCE = 60°$. Әгәр $AB = 10$ см булса, BC һәм AD турылары арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—7

1. Ике тигез ромбның диагональләре кисешү ноктасы уртак, өстәвенә бу ромбларның кечерәк диагональләре үзара перпендикуляр. Диагональләрнең кисешү ноктасы һәм бер ромб ягының уртасы аша узучы турының икенче ромб ягына перпендикуляр булуын исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының AC һәм BC катетларында $AMKC$ һәм $CFPB$ квадратлары төзелгән. M һәм P нокталарыннан AB турысына кадәр ераклыклар суммасының AB га тигез булуын исбатлагыз.

М—8

1. Диагонале һәм периметры буенча турыпочмаклык төзегез.
2. Диагонале һәм ягының аермасы буенча квадрат төзегез.

М—9

1. Теләсә нинди өчпочмакның медианасы бу өчпочмакны тигез мәйданлы өчпочмакларга бүлүен исбатлагыз.
2. $ABCD$ трапециясендә $\angle A = 45°$, $\angle C = 100°$. BD диагонале CD ян ягы белән $35°$ лы почмак төзи. AB ягында, D ноктасы BP кисемтәсендә һәм $BD : DP = 2 : 1$ булырлык итеп, $ABPK$ параллелограммы төзелгән. Параллелограммның периметры 30 см га тигез булса, аның мәйданын табыгыз.

М—10

1. Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенуза c га тигез. Кечерәк кысынкы почмагының түбәсеннән катетта a озынлыгындагы кисемтә салынган, аның очыннан гипотенузага b озынлыгындагы катет үткәрелгән. Башлангыч өчпочмакның кечерәк катетын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында A почмагы җәенке, BC ягында M ноктасы алынган, ә D түбәсе аша AM га пареллель һәм MC нурын K ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. E ноктасы AM кисемтәсенеке. EM турысында, $DE \parallel KP$ булырлык итеп, P ноктасы билгеләнгән. Кабарынкы булмаган $ABMED$ һәм $DKPMC$ күппочмакларының мәйданнарын чагыштырыгыз.

М—11

1. Дүртпочмакта диагональләр 8 см һәм 12 см га тигез һәм үзара 30° лы почмак төзеп кисешә. Бу дүртпочмакның мәйданын табыгыз.
2. E ноктасы — ABC өчпочмагында AB ягының уртасы, M һәм H нокталары BC ягын өч тигез өлешкә бүлә, $BM = MH = HC$. ABC өчпочмагының мәйданы S ка тигез булса, EMH өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

1. $ABCD$ трапециясендә AD — зур нигез. AB, BC, DC якларының урталары аша узучы турылар бу якларга перпендикуляр һәм O ноктасында кисешәләр; $\angle BCD = 150°$, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. $MHPK$ трапециясендә MK һәм HP нигезләре $3:1$ чагыштырмасында. MK кисемтәсендә A һәм B нокталары, $MA = AB = KB$ булырлык итеп билгеләнгән. HB һәм AP кисемтәләре O ноктасында кисешәләр. HOP өчпочмагының мәйданы 5 см² булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагында BH — биеклек, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$ булуын исбатлагыз.
2. Яклары a, b, c булган өчпочмак бирелгән. $c^2 > a^2 + b^2$ булса, өчпочмакның төрен билгеләгез.

М—14

1. $MPKE$ трапециясендә A ноктасы зур ME нигезенеке, $AM = MP = a$, $AE = EK$. Трапециянең диагональләре PAK өчпочмагының медианалары кисешү ноктасы аша узса, аның мәйданын табыгыз.
2. Тигезьянлы өчпочмакның нигезгә үткәрелгән биеклеге һәм нигез белән ян ягының урталарын тоташтыручы кисемтәләр 12 шәр см булса, бу өчпочмакның мәйданын табыгыз.

М—15

1. ABC өчпочмагының AC ягында D ноктасы алынган. $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$ булса, $\angle ABD > \angle DBC$ булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $AC = 2$ см. AC ягын B түбәсе янындагы тышкы почмакның биссектрисасы белән кисешкәнче күпме дәвам итәргә кирәк?

M—16

BK кисемтәсе (*K* ноктасы *AC* ягыныкы) *ABC* өчпочмагын ике охшаш *ABK* һәм *KBC* өчпочмакларына бүлә, биредә $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.

M—17

1. *ABC* өчпочмагында *A* почмагы *B* почмагыннан 2 тапкыр зуррак, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. $a^2 = bc + b^2$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагының *AB* һәм *BC* якларында тиңдәшле рәвештә *D* һәм *E* нокталары сайлап алынган. *CD* һәм *AE* *O* ноктасында кисешәләр, $S_{AOD} = S_{CEO} = 8$, $S_{DOE} = 4$. *ABC* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

M—18

1. *ABC* өчпочмагы эчендә *D* ноктасы алынган һәм *A* һәм *B* түбәләре белән тоташтырылган. *BC* ягының тышында, $\angle EBC = \angle ABD$ һәм $\angle ECB = \angle BAD$ булырлык итеп, *BCE* өчпочмагы төзелгән. $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ икәнен исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагында $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. $a^2 = bc + b^2$ булса, $\angle A = 2\angle B$ булуын исбатлагыз.

M—19

1. *ABCD* параллелограммында *A* почмагы кысынкы, $CE \perp AB$, $BC = 2AB$, *M* — *AD* ның уртасы. $\angle EMD = 3\angle AEM$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагында *AE* һәм *CD* медианалары *O* ноктасында кисешәләр; $AE = 9$, $CD = 12$, $AC = 10$. *ABC* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

M—20

1. *ACBD* трапециясендә $AC \perp BD$, $CE \perp AD$, $AC = 15$ см, $AE = 9$ см. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. *ABC* өчпочмагында *CM* — тышкы *C* почмагының биссектрисасы, $BM \perp CM$. *B* почмагы бу тышкы почмактан 2 тапкыр кечерәк, $BF \perp AM$, $AF : FM = 3 : 1$. *BAM* почмагын табыгыз.

M—21

1. Катетлары чагыштырмасы 2 : 3 һәм периметры буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез.
2. Ике кысынкы *A* һәм *C* почмагы ($\angle A + \angle C > 90°$) һәм биеклекләре кисешү ноктасыннан *B* түбәсенә кадәр ераклык буенча *ABC* өчпочмагын төзегез.

М—22

1. Синусы косинусыннан ике тапкыр зуррак булган почмакны төзегез.
2. Sin $75°$ ны исәпләгез.

М—23

1. $ABCD$ трапециясендә (AC һәм BD — нигезләр) $\angle CAD = \beta$, $\angle CBD = \alpha$, $BD = d$. AC ны табыгыз. $d = 15{,}9$, $\alpha = 27°30'$, $\beta = 40°15'$ булса, AC ны исәпләгез.
2. Тигезьянлы өчпочмакта медиана нигез белән α почмагы төзи. $\alpha = 37°23'$ булса, өчпочмак түбәсендәге почмакны табыгыз.

М—24*

1. Өчпочмакның нигезе b га тигез. Бу өчпочмакка өч ягы да a га тигез, ә кысынкы почмагы $60°$ булган трапеция камалган. Трапециянең кечерәк нигезе өчпочмакның нигезендә ята, трапециянең зур нигезе өчпочмакның нигезенә параллель, һәм аның очлары өчпочмакның калган ике ягында ята. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. ΔABC да BD — медиана, M — медианада ятучы ирекле нокта. AM һәм CM турылары өчпочмакның якларын тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталарында кисеп үтә. $EF \parallel AC$ булуын исбатлагыз.

М—25

1. Төрле радиуслы ике әйләнә тышкы яктан орыналар. Уртак орынманың орыну нокталары арасында чикләнгән кисемтәсе әйләнәләрнең диаметрлары арасындагы урта пропорциональ булуын исбатлагыз.
2. Әйләнәнең AB диаметры очлары аша аңа ике орынма үткәрелгән. Өченче орынма беренче икесен C һәм D нокталарында кисеп үтә. Бу әйләнә радиусының квадраты CA һәм DB кисемтәләренең тапкырчыгышына тигез булуын исбатлагыз.

М—26

1. Әйләнә белән аңа камалган почмак биссектрисасының кисешү ноктасы аша почмакның бер ягына параллель хорда үткәрелгән. Бу хорда камалган почмакның икенче ягына тигез булуын исбатлагыз.
2. O үзәкле әйләнәнең K ноктасы аша KA хордасы һәм BC орынмасы ($B—K—C$) үткәрелгән. O үзәге аша OA радиусына перпендикуляр итеп үткәрелгән туры AK ны — M ноктасында, BC ны N ноктасында кисеп үтә. $NK = NM$ булуын исбатлагыз.

М—27

1. QP — үзәге O ноктасында булган әйләнә диаметры. QP диаметрында O һәм P нокталары арасында O_1 ноктасы сайлап алынган һәм бу ноктаны үзәге итеп O_1P радиуслы әйләнә үткәрелгән. Кечкенә әйләнәнең O_1 үзәге аша үтүче туры зуррак әйләнәне A һәм D нокталарында, ә кечерәген B һәм C нокталарында кисеп үтә. $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$ булса, $\frac{r}{R}$ ны табыгыз.
2. Ике әйләнә K ноктасында тышкы яктан орыналар. Бу нокта аша үткәрелгән туры, әйләнәләр белән кисешеп, KP һәм KQ хордаларын хасил итә. P һәм Q нокталарыннан әйләнәләргә PT_1 һәм QT_2 орынмалары үткәрелгән, T_1 һәм T_2 — орыну нокталары. $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$ булын исбатлагыз.

М—28

1. Бер үк r радиуслы ике түгәрәк бирелгән. Аларның үзәкләре арасындагы ераклык d га тигез. Һәр түгәрәккә икенчесенең үзәге аша үткәрелгән орынмалар төзегән дүртпочмакның мәйданын исәпләгез.
2. $ABCD$ дүртпочмагының түбәләре әйләнәдә яталар, өстәвенә AC — DAB почмагының биссектрисасы. $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$ булуын исбатлагыз.

М—29

1. Медианалары һәм биссектрисалары кисешү нокталары арасындагы ераклык бирелгән m кисемтәсенә тигез булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак төзегез.
2. Тигезьянлы ABC өчпочмагының AC нигезе 6 га, ә ян ягы 5 кә тигез. Бу өчпочмакның медианалары һәм биеклекләре кисешкән нокталар арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—30

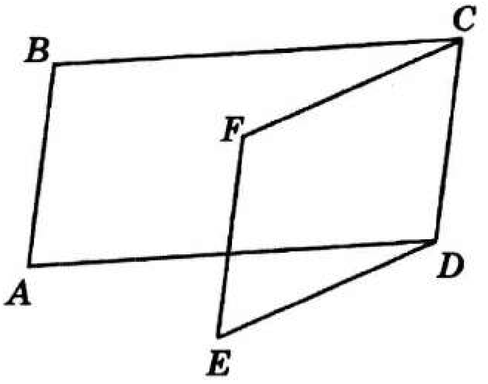
1. Яклары 20, 20, 24 булган өчпочмакка әйләнә камалган. Икенче әйләнә нигезгә, ян якка һәм бирелгән әйләнәгә орына. Бу әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. $ABCD$ трапециясендә A почмагының биссектрисасы BC нигезен (яки аның дәвамын) E ноктасында кисеп үтә. ABE өчпочмагына AB ягына — M ноктасында һәм BE ягына P ноктасында орынучы әйләнә камалган. $BM = MP$ булуы билгеле булса, BAD почмагын табыгыз.

М—31

1. ABC өчпочмагының ягына карата биеклекләре кисешү ноктасына симметрик нокталарның бу өчпочмакны камаган әйләнәдә ятуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагы тирәли әйләнә камалган, аның радиусы R; $AC = a$, $BC = b$. D ноктасы AC ягында ята, $\angle ABC = \angle BDC$. BDC өчпочмагын камаган әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—32

1. 31 нче рәсемдә $ABCD$ һәм $EFCD$ — параллелограммнар. Башлары һәм ахырлары бирелгән параллелограммнарның түбәләрендә булган ничә төрле вектор бар?
2. M ноктасы ABC өчпочмагы эчендә ята. Бу ноктадан тиңдәшле рәвештә $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ векторларына тигез булган $\overline{MF}, \overline{ME}, \overline{MD}$ векторлары салынган. $MFED$ ның параллелограмм булуын исбатлагыз.



Рәс. 31

М—33

1. $ABCD$ һәм A_1BC_1D параллелограммнары бирелгән. $\overline{AA_1} = \overline{C_1C}$ булуын исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагында M — медианаларның кисешү ноктасы. $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$ булуын исбатлагыз.

М—34

1. ABC өчпочмагында O ноктасы — аның медианаларының кисешү ноктасы. CC_1 медианасы m га тигез булса, $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}$ векторын төзегез һәм аның озынлыгын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында M һәм N — тиңдәшле рәвештә AB һәм AC якларының урталары, O — ирекле нокта, M_1 — O үзәгенә карата M ноктасына симметрик нокта, ә N_1 — шул ук үзәккә карата N ноктасына симметрик нокта. Векторларны файдаланып, $M_1N_1 \parallel BC$ һәм $M_1N_1 = \frac{1}{2}BC$ булуын исбатлагыз.

М—35

1. ABC өчпочмагының BC, CA, AB якларында, $\overline{AC_1} = k\overline{AB}$, $\overline{BA_1} = k\overline{BC}$, $\overline{CB_1} = k\overline{CA}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A_1, B_1, C_1 нокталары билгеләнгән. $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ векторларының суммасын табыгыз.
2. $ABCDEF$ алтыпочмагында $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel \parallel FA$. Векторларны файдаланып, $BE \parallel AF$ булуын исбатлагыз.

М—36

1. $ABCD$ параллелограммының диагональләре O ноктасында кисешә. K ноктасы — BC ягында, ә E ноктасы AD ягында ята, өстәвенә $BK : KC = DE : AE = 1 : 2$. Векторларны файдаланып, O ноктасы KE ның уртасы булуын исбатлагыз.
2. Векторларны файдаланып, теләсә нинди өчпочмакта медианалар бер ноктада кисешәләр, кисешү ноктасы һәр медиананы, түбәдән исәпләп, $2 : 1$ чагыштырмасында бүлүен исбатлагыз.

М—37

1. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) K — трапециянең тышкы A һәм B почмакларының биссектрисалары кисешү ноктасы, ә L — тышкы D һәм C почмакларының биссектрисалары кисешү ноктасы. $KL = 25$ см булса, $ABCD$ трапециясе периметрын исәпләгез.
2. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясендә ($\angle C = \angle D = 90°$) $BC : : CD = 1 : 2$. Трапециянең диагональләре үзара перпендикуляр, урта сызыгы 10 см га тигез. Трапециянең нигезен табыгыз.

М—38

1. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) $\angle ABC = = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40°$. Микрокалькулятор ярдәмендә трапециянең мәйданын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында A почмагы кысынкы. Параллелограммның A түбәсеннән BC һәм CD якларына тиңдәшле рәвештә AM һәм BH биеклекләре үткәрелгән, $MH : AC = = 3 : 4$. MAH һәм ABC өчпочмаклары медианаларының чагыштырмасын табыгыз.

М—39

Бер-берсенә орынып торучы ике түгәрәк ярымтүгәрәк белән камалган. Бер түгәрәкнең радиусы ярымтүгәрәк радиусыннан өч тапкыр кимрәк, ә ярымтүгәрәкнең диаметры белән орыну нокталары аның үзәгеннән төрле якларда ята. Бу түгәрәкләрнең радиуслары чагыштырмасын табыгыз.

М—1

1. 27 диагональле күппочмак була аламы?
2. Кабарынкы күппочмакта һәрберсенең градуслы үлчәме 140° булган 5 почмак бар, калган почмаклар кысынкы. Бу күппочмакның яклары санын табыгыз.

М—2

1. *ABCD* параллелограммында диагональләр кисешү ноктасы *O* аша *BC* һәм *AD* якларын тиңдәшле рәвештә *K* һәм *E* нокталарында кисеп үтүче туры үткәрелгән. $BO = OE$, *KBE* почмагын табыгыз.
2. *ABCD* параллелограммының *AB* һәм *AD* якларында тиңдәшле рәвештә *M* һәм *K* нокталары алынган, $MK \parallel BD$. *MK* турысы *CB* нурын *E* ноктасында, *CD* нурын *P* ноктасында кисеп үтә. $EM = KP$ булуын исбатлагыз.

М—3

1. Кабарынкы *ABCD* дүртпочмагының *BC* һәм *AD* якларында тиңдәшле рәвештә *K* һәм *P* нокталары билгеләнгән. *BD* диагонале *PC* кисемтәсен — *E* ноктасында, ә *AK* кисемтәсен *T* ноктасында кисеп үтә. $KC = AP$, $AT = EC$, $TK = EP$ булуы билгеле. $\angle ABC = \angle ADC$ булуын исбатлагыз.
2. Кабарынкы *ABCD* дүртпочмагында диагональләр *O* ноктасында кисешәләр, $BO = OD$, $\angle BAD > \angle BCD$. $AO < OC$ булуын исбатлагыз.

М—4

1. Теләсә нинди трапециянең диагональләре суммасы аның нигезләренең суммасыннан зуррак икәнен исбатлагыз.
2. Трапеция эчендә аның түбәләреннән тигез ераклыкта ятучы нокта булуы билгеле булса, трапециянең капма-каршы почмаклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

М—5

1. Ягы, диагонале һәм бу диагональ белән икенче ягы төзегән почмагы буенча параллелограмм төзегез.
2. Дүрт ягы буенча трапеция төзегез.

М—6

1. $MPKH$ турыпочмаклыгының MH һәм MK кисемтәләрендә тиңдәшле рәвештә E һәм T нокталары алынган, $\angle KEH = 30°$, $ET \perp MK$, $\angle KMH = 15°$. $PT > 0{,}49KH$ булуын исбатлагыз.
2. P почмагы җәенке булган $MPKH$ параллелограммы бирелгән. Диаметр буларак PH диагоналендә әйләнә төзелгән, ул MK кисемтәсен A ноктасында кисеп үтә; $\angle KPA + \angle KHA = 45°$, KB — HM турысына үткәрелгән перпендикуляр. $KB = 10$ см булса, HB ны табыгыз.

М—7

1. Ике тигез $ABCD$ һәм $AB_1C_1D_1$ ромбларының кысынкы почмакларының түбәләре уртак, өстәвенә $\angle CAC_1 = 90°$, BD һәм D_1B_1 нурлары E ноктасында кисешәләр; O — $ABCD$ ромбының диагональләре кисешү ноктасы, OP — BOC өчпочмагының биссектрисасы. $PA = PE$ булуын исбатлагыз.
2. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының AC һәм BC катетларында $AKMC$ һәм $CPEB$ квадратлары төзелгән. KM һәм PE турылары T ноктасында кисешәләр. $TC \perp AB$ булуын исбатлагыз.

М—8

1. Ягы һәм диагональләренең аермасы буенча ромб төзегез.
2. Диагонале һәм ягының суммасы буенча квадрат төзегез.

М—9

1. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагында BD биеклеге үткәрелгән. D_1 ноктасы B ноктасына карата D ноктасына симметрик. AD_1C_1 һәм ABC өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.
2. $MPKO$ трапециясендә $\angle M = 45°$ һәм $\angle K = 135°$. MP ягында ягы KO турысына параллель һәм MO ягын A ноктасында кисеп үтәрлек, өстәвенә $PA : AD = 1 : 3$ булырлык итеп, $MPDT$ параллелограммы төзелгән. Параллелограммның мәйданы 36 см^2 га тигез. Аның периметрын табыгыз.

М—10

1. Турыпочмаклы трапециянең ян яклары — a һәм b га ($a > b$), кечерәк нигезе c га тигез. Кечерәк нигезе янындагы туры почмак түбәсеннән зуррак ян якны эченә алган турыга кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында A почмагы җәенке. Параллелограмм тышында BC нурында — M һәм K нокталары, ә DC нурында E һәм P нокталары билгеләнгән, өстәвенә $AM \parallel DK$, $EA \parallel BP$. Кабарынкы булмаган $ABPCM$ һәм $ADKCE$ бишпочмакларының мәйданнары тигез булуын исбатлагыз.

М—11

1. Өчпочмакта биссектрисаларның кисешү ноктасы бер ягын эченә алган турыдан 1,5 см ераклыкта ята. Өчпочмакның периметры 16 см га тигез. Аның мәйданын табыгыз.
2. *ABC* өчпочмагының *AB*, *BC*, *AC* якларында тиңдәшле рәвештә *M*, *K*, *P* нокталары $AM : MB = BK : KC = PC : AP = 2 : 1$ булырлык итеп билгеләнгән. *ABC* өчпочмагының мәйданы S ка тигез. *MBKP* дүртпочмагының мәйданын табыгыз.

М—12

1. *MPKH* трапециясендә $MH \parallel PK$. *M*, *K*, *H*, *P* почмакларының биссектрисалары *O* ноктасында кисешәләр. *O* ноктасыннан *PK* турысына кадәрге ераклык a га тигез, $PM = b$, $KH = c$. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. *ABCD* трапециясендә *AD* — зуррак нигез. Диагональләр O ноктасында кисешәләр. *BOC* һәм *AOD* өчпочмакларының мәйданнары тиңдәшле рәвештә 5 см^2 һәм 20 см^2 га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

М—13

1. *HPK* өчпочмагында *H* почмагы җәенке. *PE* — өчпочмакның биеклеге. $PK^2 = HP^2 + HK^2 + 2HE \cdot HK$ булуын исбатлагыз.
2. Яклары a, b, c булган өчпочмакта c — зуррак як. $c^2 < a^2 + b^2$ булса, өчпочмакның төрен билгеләгез.

М—14

1. *ABCD* трапециясендә *M* — зуррак *AD* нигезенең уртасы, $AB = BC = CD = a$. Трапеция диагональләренең кисешү ноктасы *BMC* өчпочмагы биеклекләренең кисешү ноктасы белән тәңгәл килә. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. Параллелограммның диагонале аның яклары белән 90° лы һәм 15° лы почмаклар төзи. Параллелограммның зуррак ягы 12 см га тигез булса, аның мәйданын табыгыз.

М—15

1. *ABC* өчпочмагының *AC* ягында *D* ноктасы алынган. $\angle ABD >$ $> \angle BDC$ булса, $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагының яклары ($\angle B$ — өчпочмак почмакларының кечерәге) 16 см, 20 см, 24 см га тигез. *B* почмагы биссектрисасы һәм *B* түбәсе янындагы тышкы почмакның биссектрисасы белән өчпочмакның кечерәк ягы һәм аның дәвамы кисешкән нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—16

FP кисемтәсе *EFM* өчпочмагын ике охшаш *EFP* һәм *PFM* өчпочмакларына бүлә, өстәвенә $\angle PFM = 60°$, *PFM* өчпочмагының мәйданы 30 см^2 га тигез. *EFM* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—17

1. Турыпочмаклы *ACB* өчпочмагының ($\angle C = 90°$) катетлары $BC = a$, $AC = b$, $E \in AB$, өстәвенә $AE : EB = 1 : 2$. $CE = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагында *D* һәм *E* нокталары тиңдәшле рәвештә *AB* һәм *BC* якларында ята; *AE* һәм *CD* *O* ноктасында кисешәләр, $S_{ADC} = S_{AEC}$, $S_{DOE} = 2$, $S_{AOC} = 8$. *ABC* өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—18

1. *B* — *AC* кисемтәсенең уртасы. *D* һәм *E* нокталары *AC* турысыннан бер якта яталар, өстәвенә $\angle ADB = \angle EBC$ һәм $\angle DAB = \angle BCE$. $\angle BDE = \angle ADB$ булуын исбатлагыз.
2. *ABCD* — параллелограмм. *AB*, *BC*, *CD*, *DA* якларында тиңдәшле рәвештә *M*, *K*, *T*, *P* нокталары билгеләнгән, өстәвенә $\frac{AM}{CT} = \frac{AP}{CK} = \frac{1}{2}$. *MT* һәм *KP* *E* ноктасында кисешәләр. Бу нокта *MT* кисемтәсен нинди чагыштырмада бүлә?

М—19

1. *ABCD* — ромб, ромбның ягы *a* га тигез, *AE* һәм *DF* тышкы *A* һәм *D* почмакларының биссектрисалары, $BE \perp AE$ һәм $CF \perp DF$. $EF = 2a$ булуын исбатлагыз.
2. *ABC* өчпочмагының мәйданы 12 см^2 га тигез. *AE* һәм *CD* медианалары *O* ноктасында кисешәләр, $\angle AOC = 150°$, $AE = 3$ см. *CD* ны табыгыз.

М—20

1. *ABCD* трапециясендә $AC \perp BD$, $\frac{AC}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Трапециянең биеклеге $2\sqrt{6}$ см. Трапециянең мәйданын табыгыз.
2. *ABCD* ромбында диагональләр *O* ноктасында кисешәләр, $OK \perp AD$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1}$. Ромбның почмакларын табыгыз.

M—21

1. Тигезьянлы ABC өчпочмагын ($AB = BC$) BD биеклеге белән ян ягының чагыштырмасы $1 : 4$ һәм периметры буенча төзегез.
2. ABC өчпочмагын бирелгән B почмагы, $AB : BC = 1 : 2$ чагыштырмасы һәм биссектрисаларының кисешү ноктасыннан B түбәсенә кадәр ераклык буенча төзегез.

M—22

1. Косинусы синусыннан өч тапкыр кимрәк булган почмак төзегез.
2. Sin 15° ны исәпләгез.

M—23

1. $ABCD$ трапециясендә $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 2BC$, $E \in AD$, өстәвенә $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$, $BE = a$, $\angle A = \alpha$. Трапециянең мәйданын табыгыз. $a = 17{,}3$, $\alpha = 40°23'$ булса, мәйданны исәпләгез.
2. Тигезьянлы өчпочмак түбәсендәге почмакның косинусы m га тигез. Ян якка төшерелгән биеклек белән нигез арасындагы почмакның тангенсын табыгыз.

M—24

1. ABC өчпочмагына турыпочмаклы $FDEM$ трапециясе камалган ($\angle DFM = 90°$), аның зуррак DE нигезе AC га параллель, $D \in AB$, $E \in BC$, ә кечерәк FM нигезе AC да ята. Кечерәк нигез a, трапециянең биеклеге $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ә зуррак диагональ кысынкы почмакны урталай бүлә. Өчпочмакның B түбәсеннән төшерелгән биеклеге h булса, өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Кысынкы почмаклы өчпочмак нигезен биеклеге a һәм b га тигез булган өлешләргә бүлә. Әгәр биеклекнең нигездән алып биеклекләр кисешү ноктасына кадәр өлеше m га тигез булса, бу биеклекне табыгыз.

M—25

1. Төрле диаметрлы ике әйләнә тышкы яктан орыналар. Аларга ике уртак орынма AC һәм BD үткәрелгән, биредә A һәм B беренче әйләнә белән, ә C һәм D икенче әйләнә белән орыну ноктлары. $ACDB$ ның тигезьянлы трапеция булуын исбатлагыз.
2. AB — үзәге O ноктасында булган әйләнәнең диаметры. r радиуслы һәм үзәге O_1 ноктасында булган әйләнә беренче әйләнәгә B ноктасында эчке яктан орына. Зуррак әйләнә диаметрының A очы аша ике хорда үткәрелгән, алар кечерәк әйләнәгә орыналар. Хордалар арасындагы почмак 60° ка тигез. Бу хордаларның озынлыкларын табыгыз.

М—26

1. Әйләнә $ABCD$ трапециясенең (AD һәм BC — нигезләр) B, C, D түбәләре аша уза һәм AB ягына B ноктасында орына. $BD = \sqrt{BC \cdot AD}$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ дүртпочмагының түбәләре үзәге O ноктасында булган әйләнәдә ята, $\cup AB + \cup CD = 180°$. AC һәм BD диагональләре E ноктасында кисешәләр. ΔAED ның түбәләре үзәге O_1 ноктасында булган әйләнәдә ята, $O_1E = 8$ см. AD ны табыгыз.

М—27

1. CD диаметрында E ноктасы сайлап алынган. Бу нокта аша AB хордасы үткәрелгән, $AE = 4$, $BE = 3$, $AD = 6{,}5$. $\angle ABC = 60°$. CE һәм ED ны табыгыз.
2. ABC өчпочмагында B почмагы җаенке. AC нигезендә, $AB^2 = AD \cdot AC$ булырлык итеп, D ноктасын билгеләгез.

М—28*

1. $ABCD$ квадратының түбәләре үзәге O ноктасында булган әйләнәдә ята. $EMPF$ квадраты, EF ягы бирелгән квадратның BC ягында, ә M һәм P түбәләре әйләнәдә ятарлык итеп урнашкан. $ABCD$ квадратының ягы a га тигез булса, $EMPF$ квадратының ягын табыгыз.
2. Ике әйләнә M ноктасына эчке яктан орыналар. AB — зуррак әйләнәнең хордасы, ул кечерәк әйләнәгә T ноктасында орына. MT ның AMB почмагының биссектрисасы булуын исбатлагыз.

М—29

1. Биеклекләре һәм биссектрисалары кисешү нокталары арасындагы ераклыгы бирелгән p кисемтәсенә тигез булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак төзегез.
2. Тигезьянлы өчпочмакның AC нигезе 6 га, ә ян ягы 5 кә тигез. Бу өчпочмакның медианалары һәм биссектрисалары кисешү нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—30

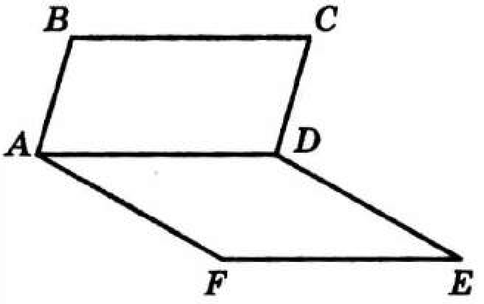
1. Нигезләре 2 см һәм 8 см га тигез булган тигезьянлы трапециягә әйләнә камалган. Икенче әйләнә зуррак нигезгә, ян якка һәм бирелгән әйләнәгә орына. Бу әйләнәнең радиусын табыгыз.
2. Ягы 4 см һәм BAD почмагы $60°$ ка тигез булган $ABCD$ ромбына әйләнә камалган. Аңа AB ны M ноктасында һәм AD ны P ноктасында кисеп үтүче орынма үткәрелгән. $MP = 2$ см булса, MB һәм PD ны табыгыз.

М—31

1. AA_1, BB_1, CC_1 — ABC өчпочмагының биеклекләре булсын. $A_1B_1C_1$ өчпочмагы биссектрисаларының бу биеклекләрдә ятуын исбатлагыз.
2. Әйләнәгә ABC өчпочмагы камалган, $AC = b$, $AB = c$. A ноктасында әйләнәгә орынма үткәрелгән. CB турысы бу орынманы M ноктасында кисеп үтә ($C—B—M$). AMC өчпочмагын камаган әйләнәнең радиусы R га тигез. AMB өчпочмагын камаган әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—32

1. 32 нче рәсемдә $ABCD$ һәм $FADE$ — параллелограммнар. Башлары һәм ахырлары бирелгән параллелограммнарның түбәләрендә булган ничә төрле вектор бар?
2. ABC — дөрес өчпочмак. M ноктасы өчпочмакның тышында ята. M ноктасыннан $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ векторларына тиңдәшле рәвештә тигез булган $\overline{MK}$, $\overline{ML}$, $\overline{MP}$ векторлары салынган. $ML \perp KP$ булуын исбатлагыз



Рәс. 32

М—33

1. Уртак AA_1 медианалары булган ABC һәм AB_1C_1 өчпочмаклары бирелгән. $\overline{CB_1} = \overline{C_1B}$ булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ — параллелограмм. O — диагональләренең кисешү ноктасы. $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PO}$ (P — яссылыкның теләсә нинди ноктасы) булуын исбатлагыз.

М—34

1. O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы. $\overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC}$ векторын төзегез һәм, AA_1 медианасы m га тигез булса, аның озынлыгын табыгыз.
2. ABC өчпочмагы бирелгән. O — ирекле нокта, A_1, B_1, C_1 — O ноктасына карата тиңдәшле рәвештә A, B, C нокталарына симметрик нокталар. Векторлардан файдаланып, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ һәм аларның яклары тиңдәш рәвештә параллель булуын исбатлагыз.

М—35

1. $ABCD$ параллелограммының AB, BC, CD, DE якларында, $\overline{AP} = k\overline{AB}$, $\overline{BE} = k\overline{BC}$, $\overline{CF} = k\overline{CD}$, $\overline{DM} = k\overline{DA}$ булырлык итеп, P, E, F, M нокталары бирелгән. $PEFM$ ның параллелограмм булуын исбатлагыз.
2. O үзәкле әйләнәдә үзара перпендикуляр AB һәм CD хордалары үткәрелгән. Хордалар яки аларның дәвамнары M ноктасында кисешәләр. $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ булуын исбатлагыз.

М—36

1. Ике параллелограмм $ABCD$ һәм $AB_1C_1D_1$ нең уртак A түбәсе бар. $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$ булуын исбатлагыз.
2. A_1 ноктасы ABC өчпочмагының BC ягында, ә B_1 ноктасы AC ягында ята; O — AA_1 һәм BB_1 кисемтәләренең кисешү ноктасы, өстәвенә $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$. Векторларны файдаланып, AA_1 һәм BB_1 нең ABC өчпочмагының медианалары булуын исбатлагыз.

М—37

1. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясендә ($AD \parallel BC$) диагональләр үзара перпендикуляр, биеклек 12 см га тигез, A түбәсеннән CD турысына кадәр ераклык B түбәсеннән бу турыга кадәр ераклыктан өч тапкыр зуррак. Трапециянең нигезләрен табыгыз.
2. $ABCD$ трапециясендә A түбәсе янындагы почмак туры, ә D түбәсе янында почмак 30° ка тигез. Үзәге AD ягында яткан әйләнә AB, BC, CD турыларына орына. Трапециянең урта сызыгы $6 - \sqrt{3}$ булса, әйләнәнең радиусын табыгыз.

М—38

1. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40°$. Микрокалькулятор ярдәмендә, трапециянең мәйданын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында A почмагы кысынкы, BM һәм BH — параллелограммның тиңдәшле рәвештә AD һәм DC якларына үткәрелгән биеклекләре, $MH : BD = 2 : 3$. MBH һәм BDC өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

М—39

Тигезьянлы ABC өчпочмагынның ($AB = BC$) AC ягында D ноктасы сайлап алынган, өстәвенә $AD = a$, $DC = b$. ABD һәм DBC өчпочмакларына әйләнәләр камалган. Беренче әйләнә BD га E ноктасында, ә икенчесе F ноктасында орына. E һәм F нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

Контроль эшләр

К—1 **1 нче вариант**

1°. *ABCD* трапециясендә *E* ноктасы — зур *AD* нигезенең уртасы, $ED = BC$, $\angle B = 120^{\circ}$. *AEC* һәм *BCE* почмакларын табыгыз.

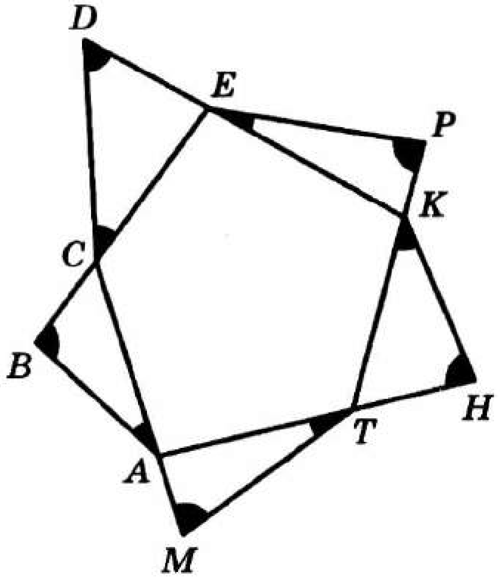
2°. Диагонале һәм ягы буенча ромб төзегез.

3. *ABCD* турыпочмаклыгында *O* ноктасы — симметрия үзәге, ә *P* һәм *K* нокталары — тиңдәшле рәвештә *AB* һәм *BC* якларының урталары.

а) Кабарынкы *OPBK* дүртпочмагының төрен билгеләгез.

б) $PK = OD$ булуын исбатлагыз.

4*. 33 нче рәсемдә билгеләнгән почмакларның суммасын табыгыз.



Рәс. 33

К—1 **2 нче вариант**

1°. *ABCD* дүртпочмагы бирелгән, аның диагональләренең урталары уртак. *AD* ягының *D* түбәсе ягына дәвамында *E* ноктасы алынган, $DC = EC$. *ABCE* дүртпочмагының тигезьянлы трапеция булуын исбатлагыз.

2°. Ягы һәм диагонале белән бу ягы төзегән почмак буенча турыпочмаклык төзегез.

3. *ABCD* ромбында *O* ноктасы — симметрия үзәге, ә *P* һәм *K* нокталары, $OP \parallel BC$, $OK \parallel AB$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә *AB* һәм *BC* якларыныкы.

а) Кабарынкы *OPBK* дүртпочмагының төрен билгеләгез.

б) *BPK* почмагы 40° ка тигез булса, *BCA* почмагын табыгыз.

4*. Кабарынкы алтыпочмакның дүрт кысынкы почмагы булуы мөмкинме?

К—1 — 3 нче вариант

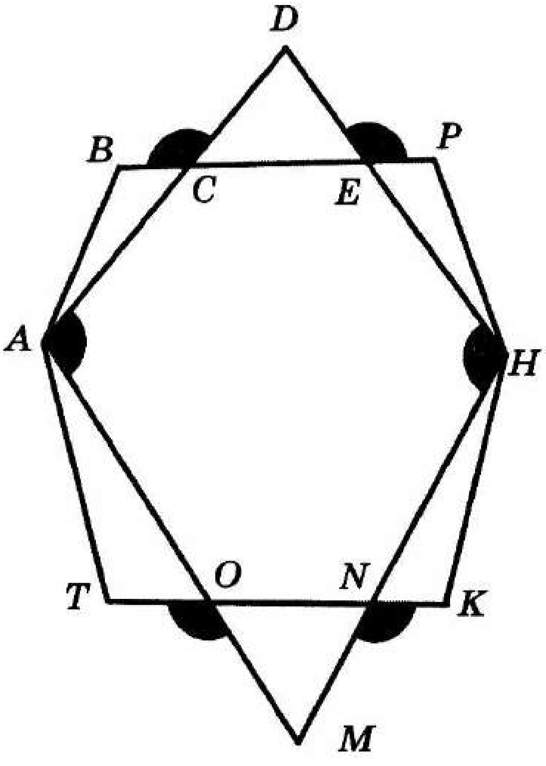
1°. $ABCD$ дүртпочмагында $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = 30°$. BC ягында, $\angle CDE = 60°$ булырлык итеп, E ноктасы алынган. $ABED$ дүртпочмагының турыпочмаклы трапеция булуын исбатлагыз.

2°. Периметры буенча квадрат төзегез.

3. $ABCD$ ромбының AB, BC, CD, AD якларында тиңдәшле рәвештә P, K, H, M нокталары алынган. PM, KH, PK турыларының һәрберсе ромбның симметрия күчәрләренең берсенә параллель. AC диагонале PM кисемтәсен E ноктасында, ә KH кисемтәсен T ноктасында кисеп үтә.

а) $EPKT$ дүртпочмагының диагональләре тигез булуын исбатлагыз.

б) Кабарынкы $MPKH$ дүртпочмагының төрен билгеләгез.



Рәс. 34

4*. 34 нче рәсемдә билгеләнгән почмакларның суммасын табыгыз.

К—1 — 4 нче вариант

1°. $ABCD$ трапециясендә зуррак AD нигезендә E ноктасы алынган. $\angle ABC = 130°$, $\angle BCE = 50°$ булуы билгеле. AC һәм BE кисемтәләренең урталары уртак булуын исбатлагыз.

2°. Диагонале һәм ягы белән бу диагонале арасындагы почмак буенча ромб төзегез.

3. $ABCD$ турыпочмаклыгының симметрия үзәге аның BC һәм AD якларын тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталарында кисеп үтә. AB ягында — P ноктасы, CD ягында T ноктасы алынган, өстәвенә $PM \parallel KT$, $PM = PK$.

а) Кабарынкы $PMTK$ дүртпочмагының төрен билгеләгез.

б) $PMTK$ дүртпочмагының диагональләре кисешү ноктасыннан C ноктасына кадәр ераклык PK га тигез булуын исбатлагыз.

4*. Ниндидер кабарынкы n-почмаклыкта $n-1$ почмакларның суммасы 359° ка тигез. n ны табыгыз.

К—2   1 нче вариант

1°. $ABCD$ параллелограммының AD ягында, $AE = 4$ см, $ED = 5$ см, $BE = 12$ см, $BD = 13$ см булырлык итеп, E ноктасы алынган. BED өчпочмагының турыпочмаклы булуын исбатлагыз һәм параллелограммның мәйданын табыгыз.

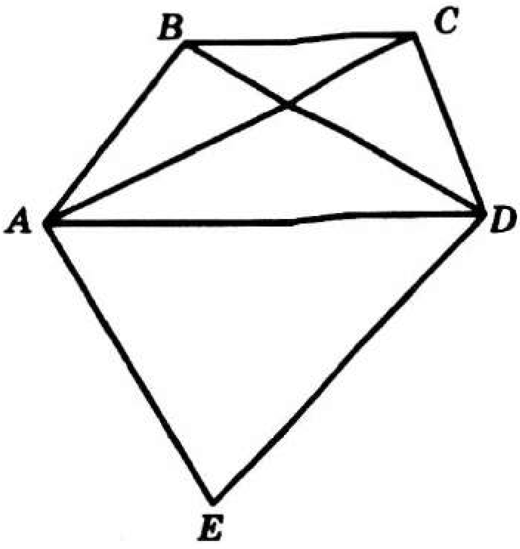
2°. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагында AK һәм CE биеклекләре үткәрелгән, $CE = 12$ см, $BE = 9$ см, $AK = 10$ см. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

3. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясендә $AD \parallel BC$, $\angle A = 30°$, BK биеклеге 1 см га тигез, $BC = 2\sqrt{3}$ см.

а) Трапециянең мәйданын табыгыз.

б) M ноктасы BD кисемтәсенең уртасы булса, KMD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

4*. 35 нче рәсемдәге $ABDE$ һәм $ACDE$ дүртпочмакларының мәйданнары тигез. $BC \parallel AD$ булуын исбатлагыз.



Рәс. 35

К—2   2 нче вариант

1°. $ABCD$ трапециясендә AD һәм BC — нигезләр, $\angle A = 90°$, $BC = 4$ см, $CD = 10$ см. CK биеклеге 8 см га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

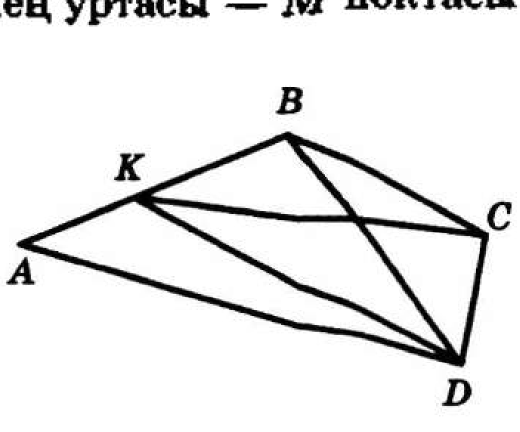
2°. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагында $\angle A = 45°$, $BC = 13$ см. AC ягында, $DC = 5$ см, $BD = 12$ см булырлык итеп, D ноктасы алынган. BDC өчпочмагының турыпочмаклы булуын исбатлагыз һәм ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

3. $ABCD$ параллелограммында $\angle A = 60°$, BD диагонале AB ягына перпендикуляр. BD кисемтәсенең уртасы — M ноктасы аша AD га параллель узучы туры, AB ягын K ноктасында кисеп үтә, $MK = 4$ см.

а) $ABCD$ параллелограммының мәйданын табыгыз.

б) AMD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

4*. 36 нчы рәсемдә $BC \parallel KD$. $AKCD$ дүртпочмагының мәйданы ABD өчпочмагының мәйданына тигез булуын исбатлагыз.



Рәс. 36

К—2   3 нче вариант

1°. $ABCD$ трапециясендә AD — зур нигез, CK — биеклек, $AB = 5$ см. AK кисемтәсендә, $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см булырлык итеп, E ноктасы алынган. ABE өчпочмагының төрен билгеләгез һәм трапециянең мәйданын табыгыз.

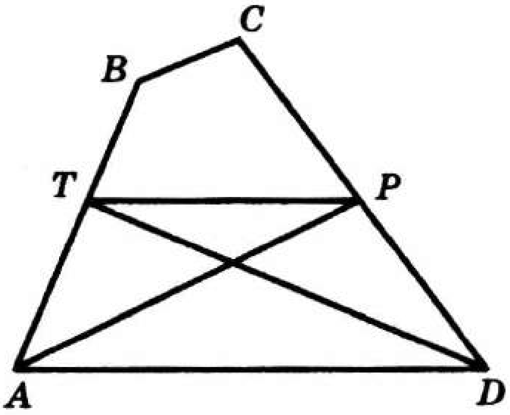
2°. ABC өчпочмагында A почмагы җәенке, BK һәм CD — биеклекләр, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

3. $ABCD$ ромбында $AC = 10$ дм, $BD = 24$ дм. AK биеклеге BC ягына үткәрелгән.

а) AK ны табыгыз.

б) O — ромб диагональләренең кисешү ноктасы, M — AB ягының уртасы булса, AOM өчпочмагының мәйданын табыгыз.

4*. 37 нче рәсемдә $ABCP$ һәм $DTBC$ дүртпочмакларының мәйданнары тигез. $TP \parallel AD$ булуын исбатлагыз.



Рәс. 37

К—2   4 нче вариант

1°. $ABCD$ параллелограммында BK һәм BT — биеклекләр, K һәм T нокталары AD һәм DC якларында ята, $BK = 10$ см, $BT = 9$ см, $TC = 12$ см. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

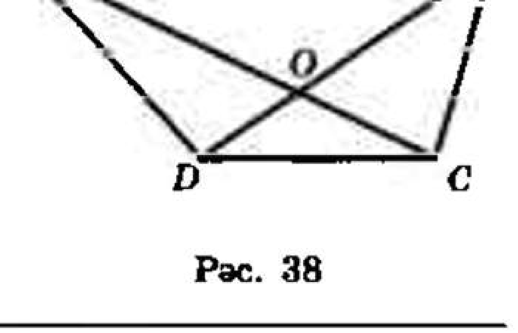
2°. ABC өчпочмагында $\angle A = 45°$, C почмагы — җәенке, $BC = 17$ см. AC ягының C ноктасы ягына дәвамында, $CD = 8$ см, $BD = 15$ см булырлык итеп, D ноктасы алынган. BCD өчпочмагының турыпочмаклы булуын исбатлагыз һәм ABD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

3. $ABCD$ трапециясендә $\angle A = 90°$, CD ян ягы AC диагоналенә перпендикуляр, $CD = 3$ см, $AD = 5$ см.

а) Трапециянең мәйданын табыгыз.

б) M — CD ягының уртасы булса, AMD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

4*. 38 нче рәсемдә кабарынкы булмаган $ABOCD$ һәм $AODCB$ бишпочмакларының мәйданнары тигез. $AB \parallel DC$ булуын исбатлагыз.



Рәс. 38

К—3 1 нче вариант

1°. *ABCD* кабарынкы дүртпочмагының барлык яклары төрле озынлыкка ия. Диагональләр *O* ноктасында кисешәләр, $OC = 5$ см, $OB = 6$ см, $OA = 15$ см, $OD = 18$ см.

а) *ABCD* дүртпочмагының трапеция булуын исбатлагыз.

б) *AOD* һәм *BOC* өчпочмаклары мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.

2. *ABC* өчпочмагында *AB* һәм *BC* якларында тиңдәшле рәвештә *K* һәм *M* ноктлары алынган, өстәвенә $\angle KMC + \angle A = 180°$.

а) $\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC}$ булуын исбатлагыз.

б) Әгәр *AKMC* дүртпочмагының мәйданы белән *BKM* өчпочмагы мәйданы чагыштырмасы $8:1$ булса, $AB : BM$ ны табыгыз.

3*. *ABCD* трапециясенең кечерәк *BC* нигезендә һәм *CD* ягында тиңдәшле рәвештә *E* һәм *K* ноктлары алынган, ә *AE* кисемтәсендә *O* ноктасы билгеләнгән. Әгәр $KC = 2$ см, $KD = 3$ см, $OK \parallel AD$, $\angle OBA = \angle OBE$ булса, $\frac{AB}{BE}$ чагыштырмасын табыгыз.

К—3 2 нче вариант

1°. *ABC* өчпочмагының *AB* ягының *M* ноктасы аша *BD* биеклегенә перпендикуляр һәм *BC* ягын *P* ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән; $BM = 5$ см, $BP = 8$ см, $BC = 24$ см.

а) *AB* ны табыгыз.

б) *MPB* һәм *ABC* өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

2. *ABCD* кабарынкы дүртпочмагында *BD* диагонале *B* почмагын уртага бүлә, $\frac{BD^2}{BC} = AB$.

а) $\angle BAD = \angle BDC$ икәнен исбатлагыз.

б) Әгәр $DC = 1{,}5AD$ булса, *ABCD* дүртпочмагы һәм *ABD* өчпочмагының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

3*. *ABCD* трапециясенең *AB* һәм *CD* ян якларында тиңдәшле рәвештә *P* һәм *K* ноктлары, $PK \parallel AD$, $\angle DBK = \angle KBC$, $BC : BD = 3 : 4$ булырлык итеп алынган. $BP : PA$ ны табыгыз.

К—3 **3 нче вариант**

1°. ABC өчпочмагының AB, BC, AC якларында, $AB = 9$ см, $AD = 3$ см, $AP = 6$ см, $DP = 4$ см, $BE = 8$ см, $DE = 12$ см булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә D, E, P нокталары билгеләнгән.

а) $DE \parallel AC$ булуын исбатлагыз.

б) DBE һәм ADP өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

2°. $ABCD$ трапециясендә $\angle A = 90°$. CE биеклеге AD нигезен ике тигез кисемтәгә бүлә, O ноктасы — AC кисемтәсенең уртасы.

а) $\frac{BO}{BC} = \frac{CD}{AD}$ булуын исбатлагыз.

б) Кабарынкы булмаган $AOBCD$ бишпочмагының мәйданы S булса, ACD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

3*. ABC өчпочмагының AB һәм BC якларында, $\angle MKB = \angle A$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм K нокталары алынган. BO кисемтәсе MBK өчпочмагының биссектрисасы, $MO = 2$ см, $OK = 3$ см. $BC : AB$ чагыштырмасын табыгыз.

К—3 **4 нче вариант**

1°. $ABCD$ трапециясендә O ноктасы — кечерәк BC нигезенең уртасы, AO һәм CD турылары E ноктасында кисешәләр, $AD = 6$ дм, $BC = 4$ дм.

а) $\frac{EC}{CD}$ чагыштырмасын табыгыз.

б) EOC һәм AED өчпочмаклары мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.

2°. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында $AD = 2BC$, $AC = CD$, O — ACның уртасы, $\angle OBC = \angle OCB$.

а) $BC \parallel AD$ булуын исбатлагыз.

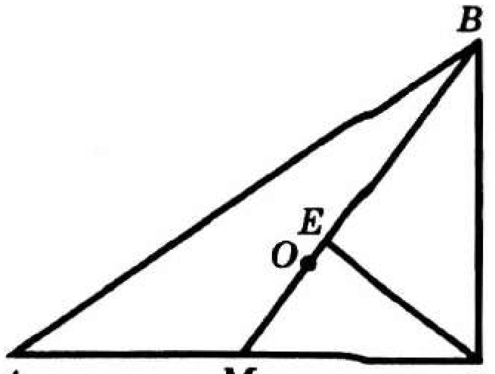
б) BOC өчпочмагы һәм кабарынкы $AOBCD$ бишпочмагы мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.

3*. ABC өчпочмагының AB һәм BC якларында D һәм E нокталары билгеләнгән. Бу өчпочмакның BK биссектрисасы DE кисемтәсен T ноктасында кисеп үтә, $DT = 3$ дм, $TE = 4$ дм, $AK = 8$ дм, $KC = 6$ дм. $\angle C = \angle BDE$ булуын исбатлагыз.

К—4

1 нче вариант

1°. 39 нчы рәсемдә $BC \perp AC$, $EC \perp$ $\perp MB$, O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы, MC = = 30 мм, ME = 20 мм. Cos EMC һәм OM ны табыгыз.



Рәс. 39

2°. Бирелгән кисемтәнең $\frac{2}{5}$ сенә тигез булган кисемтә төзегез.

3. $ABCD$ трапециясендә $BC \parallel AD$, $AB \perp BD$, M һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә BC һәм CD кисемтәләренең урталары, $MK = \sqrt{5}$ см, $AD = 2\sqrt{10}$ см.

а) $\angle DBC$ ны табыгыз.

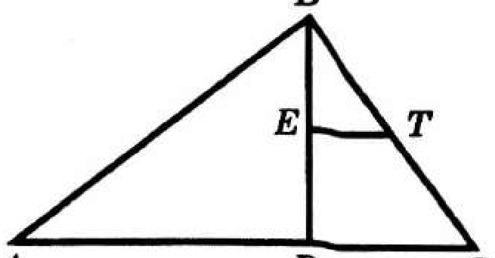
б) CE — BCD өчпочмагының биеклеге, ә ECD почмагының тангенсы 3 кә тигез булса, BE ны табыгыз.

4*. Әгәр картина рамкасының киңлеге теләсә кайсы урында бертөрле булса, тышкы һәм эчке турыпочмаклар охшаш булырмы?

К—4

2 нче вариант

1°. 40 нчы рәсемдә $AB \perp BC$, $BD \perp$ $\perp AC$, E һәм T нокталары BD һәм BC кисемтәләренең урталары, AD = = 25 дм, ET = 8 дм. BD һәм tg A ны табыгыз.



Рәс. 40

2°. P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 кисемтәләре бирелгән. $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_3Q_3}{AB}$ чагыштырмасы дөрес булырлык итеп, AB кисемтәсе төзегез.

3. ABC өчпочмагында BD медианасы BC ягы белән 60° лы DBC почмагын төзи. Медианаларының кисешү ноктасы BC турысыннан $\sqrt{3}$ см ераклыкта ята.

а) BD ны табыгыз.

б) $\angle ABD = 30°$ булса, AB ны табыгыз.

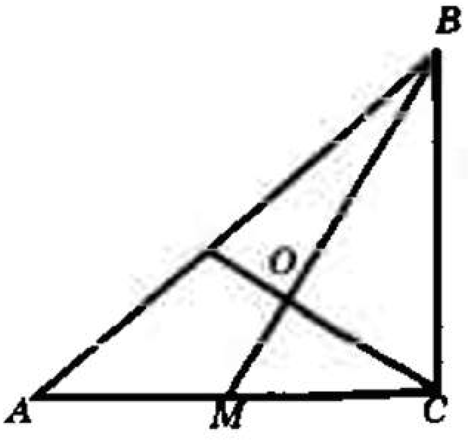
4*. Турыпочмаклыкның капма-каршы якларының уртасы аша узучы туры бу турыпочмаклыкны икегә бүлә. Хасил булган турыпочмаклыкларның берсе бирелгәнгә охшаш булырмы?

К—4 **3 нче вариант**

1°. 41 нче рәсемдә $\angle BCA = 90°$, O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы, $\angle COM = 90°$, $OM = \sqrt{2}$ дм. OC ны һәм $\operatorname{tg} OBC$ ны табыгыз.

2°. Бирелгән кисемтәнең $\frac{6}{5}$ сына тигез булган кисемтәне төзегез.

3. $ABCD$ трапециясендә $\angle A = 90°$. Зур нигезе AD һәм ян ягы CD урталары арасындагы ераклык $\sqrt{18}$ см га тигез, $BC = 6$ см.



Рәс. 41

а) CAD почмагын табыгыз.

б) ACD почмагының тангенсы 2 гә тигез булса, D ноктасыннан AC турысына кадәр ераклыкны табыгыз.

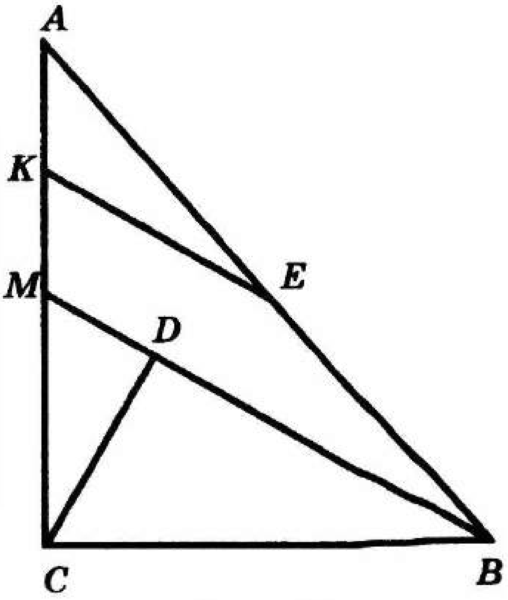
4*. Квадратны ике тигез булмаган охшаш турыпочмаклыкка бүләргә мөмкинме?

К—4 **4 нче вариант**

1°. 42 нче рәсемдә $AC \perp BC$, $CD \perp MB$. E һәм K нокталары — AB һәм AM кисемтәләренең урталары, $EK = 12{,}5$ см, $DM = 9$ см. CM һәм $\sin MBC$ ны табыгыз.

2°. P_1Q_1 һәм P_2Q_2 кисемтәләре бирелгән. AB кисемтәсен $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_2Q_2}{AB}$ булырлык итеп төзегез.

3. ABC өчпочмагында BD — медиана, O — медианаларның кисешү ноктасы, $\angle BDC = 60°$. O ноктасыннан AC турысына OM перпендикуляры төшерелгән, $OM = 2\sqrt{3}$ дм.



Рәс. 42

а) BD ны табыгыз.

б) $\angle ABD = 30°$ булса, OM һәм AB турылары кисешү ноктасыннан A түбәсенә кадәр ераклыкны табыгыз.

4*. Турыпочмаклыкны үзара тигез булмаган ике охшаш турыпочмаклыкка бүләргә мөмкинме?

К—5 1 нче вариант

1°. Тигезьянлы өчпочмакның ягы $2\sqrt{3}$ см га тигез. Өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусын табыгыз.

2°. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагы әйләнә белән камалган. Урта перпендикулярларның кисешү ноктасы O AB турысыннан 6 см ераклыкта ята. $\angle AOC = 90°$, $\angle OBC = 15°$ булса, OBA почмагын һәм әйләнә радиусын табыгыз.

3. A почмагы 45° ка һәм AD ягы $10\sqrt{2}$ дм га тигез булган $ABCD$ параллелограммына әйләнә камалган.

а) Әйләнәнең радиусын табыгыз.

б) D түбәсеннән әйләнәнең AD һәм DC турылары белән орынган нокталарына кадәр ераклыклар суммасын микрокалькулятор ярдәмендә табыгыз.

4*. AB диаметрлы әйләнә һәм аның эчендә O ноктасы бирелгән. Бүлемнәре булмаган линейканы гына файдаланып, O ноктасыннан AB турысына перпендикуляр төшерегез.

К—5 2 нче вариант

1°. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $\angle B = 120°$. Өчпочмакны камаган әйләнәнең радиусы 2 см га тигез. AB ягын табыгыз.

2°. C почмагы туры булган ABC өчпочмагына O үзәкле әйләнә камалган. Ул өчпочмакның AB, BC, AC якларына тиңдәшле рәвештә M, T, P нокталарында орына. ABC өчпочмагының биссектрисалары кисешү ноктасыннан C түбәсенә кадәр ераклык $\sqrt{8}$ см га тигез. Әйләнәнең радиусын, TOP почмагын һәм TMP почмагын табыгыз.

3. Радиусы 4 см булган әйләнәгә камалган $ABCD$ дүртпочмагының AB һәм CD яклары үзара параллель һәм аларның озынлыклары тигез, $\angle ADB = 60°$.

а) AB ны табыгыз.

б) Әйләнәнең M ноктасы BC кисемтәсенең очларыннан тигез ераклыкта булса, MBC почмагы нинди кыйммәтләр алырга мөмкин?

4*. PQ һәм ET ($ET > PQ$) кисемтәләре бирелгән. $AB = BC = PQ$, $BD = ET$, диагональләре O ноктасында кисешерлек һәм $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ булырлык итеп, $ABCD$ дүртпочмагы төзегез.

К—5 3 нче вариант

1^0. ABC өчпочмагында $\angle A = 60°$. Бу өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусы 1 см. AC турысының әйләнә белән орыну ноктасыннан A түбәсенә кадәр ераклыкны табыгыз.

2^0. B почмагы җәенке булган ΔABC да O ноктасы — урта перпендикулярларның кисешү ноктасы, $AC = 4\sqrt{2}$ дм, $\angle AOC = 90°$. Өчпочмакны камаган әйләнә радиусын һәм ABC почмагын табыгыз.

3. $ABCD$ трапециясенә үзәге O һәм радиусы 6 см булган әйләнә камалган, $\angle CAD = 45°$, $\angle ACD = 90°$.

а) $AB = 10\sqrt{2}$ см булса, $BC + AD$ суммасын табыгыз.

б) $OC \cdot OD$ тапкырчыгышын табыгыз.

4*. Диаметры AB булган әйләнә һәм аның тышында O ноктасы бирелгән. Бүлемнәре булмаган линейканы гына файдаланып, AB турысына O ноктасыннан перпендикуляр төшерегез.

К—5 4 нче вариант

1^0. ΔABC ны камаган әйләнә радиусы $\sqrt{8}$ см, ә өчпочмакның ике почмагы 45 шәр градуска тигез. ΔABC ның якларын табыгыз.

2^0. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $\angle B = 120°$, O — биссектрисаларның кисешү ноктасы. Бу өчпочмакка $2\sqrt{3}$ см радиуслы әйләнә камалган, һәм ул BC һәм AC турыларына тиңдәшле рәвештә D һәм E нокталарында орына. BO һәм $\angle BED$ ны табыгыз.

3. $ABCD$ трапециясе әйләнәгә камалган, $\angle A = 60°$, $\angle ABD = 90°$, $CD = 4$ см.

а) Әйләнәнең радиусын табыгыз.

б) M — әйләнәнең ирекле ноктасы булса, BMC почмагының кыйммәтләре нинди булырга мөмкин?

4*. PQ, ET кисемтәләре һәм H почмагы бирелгән. O — диагональләр кисешү ноктасы, $BO = PQ$, $DO = ET$, $\angle DOC = \angle H$ һәм $AO \cdot OC = DO \cdot OB$ булган $ABCD$ дүртпочмагын төзегез.

К—6 1 нче вариант

1^0. $ABCD$ параллелограммын сызыгыз һәм $\frac{2}{3}\overline{CB} + \overline{CD}$, $\frac{1}{4}(\overline{BA} - \overline{BC})$ векторларын төзегез.

2. ABC өчпочмагында B_1— AC ның уртасы, M — медианаларның кисешү ноктасы.

а)^0 $\overline{MB_1}$ ын $\overline{MA}$ һәм $\overline{MC}$ аша күрсәтегез.

б) $\overline{CM}$ ын $\overline{CB}$ һәм $\overline{CA}$ аша күрсәтегез.

в) $A_1 \in BC$ һәм $BA_1 : A_1C = 1:2$ булса, $\overline{MA_1}$ ын $\overline{AB}$ һәм $\overline{AC}$ аша күрсәтегез.

г) $A_1 \in BC$ һәм $BA_1 : A_1C = 1:2$ булса, векторларны файдаланып, BB_1 кисемтәсенең уртасы AA_1 турысында ятуын исбатлагыз.

К—6 2 нче вариант

1°. Төрле нокталардан салынган ике коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын үткәрегез. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ векторларын төзегез.

2. $ABCD$ трапециясендә AD һәм BC нигезләре $3 : 1$ чагыштырмасында. Трапециянең диагональләре O ноктасында кисешәләр.

а)° $\overrightarrow{AC}$ ын $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ аша күрсәтегез.

б) $\overrightarrow{BO}$ ын $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AO}$ аша күрсәтегез.

в) Әгәр E һәм M нокталары тиңдәшле рәвештә AB һәм BC якларының урталары булса, $\overrightarrow{AO}$ ын $\overrightarrow{DE}$ һәм $\overrightarrow{DM}$ аша күрсәтегез.

г)* Әгәр E ноктасы AB ягының уртасы булса, $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$ булуын исбатлагыз.

К—6 3 нче вариант

1°. ABC өчпочмагын сызыгыз һәм $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ һәм $\frac{1}{5}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$ векторларын төзегез.

2. $ABCD$ параллелограммында M ноктасы BC ягының уртасы, BD һәм AM кисемтәләре O ноктасында кисешәләр.

а)° $\overrightarrow{AM}$ ын $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ аша күрсәтегез.

б) $\overrightarrow{BO}$ ын $\overrightarrow{BA}$ һәм $\overrightarrow{BC}$ аша күрсәтегез.

в) Әгәр P ноктасы CD кисемтәсенең уртасы булса, $\overrightarrow{OD}$ ын $\overrightarrow{AP}$ һәм $\overrightarrow{AM}$ аша күрсәтегез.

г)* Әгәр P ноктасы CD кисемтәсенең уртасы булса, $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AB$ булуын исбатлагыз.

К—6 4 нче вариант

1°. Төрле нокталардан салынган ике коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын сызыгыз. $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ төзегез.

2. $ABCD$ трапециясенең BC һәм AD нигезләре $1 : 2$ чагыштырмасында, E — CD ягының уртасы, O — диагональләрнең кисешү ноктасы.

а)° $\overrightarrow{OE}$ ын $\overrightarrow{OC}$ һәм $\overrightarrow{OD}$ аша күрсәтегез.

б) $\overrightarrow{BO}$ ын $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AB}$ аша күрсәтегез.

в) $\overrightarrow{CO}$ ын $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ аша күрсәтегез.

г)* Векторларны файдаланып, AE кисемтәсен E ноктасыннан исәпләп $1 : 4$ чагыштырмасында бүлүче M ноктасы BD турысыныкы булуын исбатлагыз.

К—7 1 нче вариант

1°. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында A һәм B почмаклары — туры, $BC = 6$, $AD = 8$, $AB = 2\sqrt{3}$.

а)$^{\circ}$ $ABCD$ дүртпочмагының мәйданын табыгыз.

б)$^{\circ}$ $ABCD$ дүртпочмагының C һәм D почмакларын табыгыз.

в)* AB һәм CD якларының урталарын тоташтыручы кисемтә озынлыгын табыгыз.

г)$^{\circ}$ $ABCD$ дүртпочмагына әйләнә камарга мөмкинме, шуны ачыклагыз.

д)$^{\circ}$ A, B, C, D нокталары аша әйләнә үткәрергә мөмкинме, шуны ачыклагыз.

е) ABC һәм ACD өчпочмаклары охшашмы, шуны ачыклагыз.

ж) $\overline{CA}$ ын $\overline{CB}$ һәм $\overline{CD}$ аша күрсәтегез.

2*. Озынлыгы бирелгән кисемтәдән $\sqrt{5}$ тапкыр зуррак булган кисемтә төзегез.

К—7 2 нче вариант

1. Тигезьянлы ABC өчпочмагында B почмагы 120° ка тигез, M һәм H нокталары тиңдәшле рәвештә AB һәм BC якларының урталары, $AC = 4\sqrt{3}$.

а)$^{\circ}$ ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

б)$^{\circ}$ AM һәм HC кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

в)* ABC һәм MBH өчпочмакларының охшаш булуын исбатлагыз һәм аларның мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

г)$^{\circ}$ $\overline{MB}$ ын $\overline{AC}$ һәм $\overline{HB}$ аша күрсәтегез.

д)$^{\circ}$ A, M, H, C нокталары аша әйләнә үткәрергә мөмкинме, шуны ачыклагыз.

е) E ноктасы AC турысына үткәрелгән HE перпендикулярының нигезе булса, HME почмагының синусын табыгыз.

ж) MBH өчпочмагына камалган әйләнәнең радиусын табыгыз.

2*. Озынлыгы бирелгән кисемтәдән $\sqrt{12}$ тапкыр зуррак булган кисемтә төзегез.

К—7 **3 нче вариант**

1. Үзәге O һәм AB диаметры 4 см га тигез булган әйләнәдә B ноктасына караганда A ноктасына якынрак урнашкан M ноктасы алынган. M ноктасы аша әйләнәгә орынма, ә A һәм B ноктлары аша AB га перпендикуляр булган һәм орынманы тиңдәшле рәвештә D һәм C ноктaларында кисеп үтүче нурлар үткәрелгән, $\angle DCB = 60°$.

а)° OCB, ADC, ODC почмакларын табыгыз.

б)° AD һәм CB кисемтәләрен табыгыз.

в)° $ABCD$ дүртпочмагының мәйданын табыгыз.

г)° $MOBC$ дүртпочмагының почмакларын табыгыз.

д)° AOD һәм COB өчпочмакларының охшаш булуын исбатлагыз.

е) O ноктасыннан DC кисемтәсенең уртасына кадәр ераклыкның $0{,}5(MD + BC)$ га тигез булуын исбатлагыз.

ж) $\overline{OM}$ ын $\overline{OD}$ һәм $\overline{OC}$ аша күрсәтегез.

2*. Озынлыгы бирелгән кисемтәдән $\sqrt{14}$ тапкыр зуррак булган кисемтә төзегез.

К—7 **4 нче вариант**

1. $ABCD$ параллелограммында $\angle A = 45°$, $AD = 4$. AB ягының дәвамында, PDA почмагы 90° ка тигез булырлык итеп, BP кисемтәсе салынган. BC һәм PD кисемтәләре T ноктасында кисешәләр, $PT : TD = 3 : 1$.

а)° BPT һәм TCD өчпочмакларының охшаш булуын исбатлагыз һәм аларның мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.

б)° $ABCD$ параллелограммының мәйданын табыгыз.

в)° AB һәм TD кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

г)° A, B, T, D нокталары аша әйләнә үткәрергә мөмкинме, шуны ачыклагыз.

д)° $\overline{AB}$ ын $\overline{CA}$ һәм $\overline{TB}$ аша күрсәтегез.

е) CAD почмагының синусын табыгыз.

ж) BPT өчпочмагына камалган әйләнәнең орыну нокталары хасил иткән дугаларның градуслы үлчәмнәрен табыгыз.

2*. Озынлыгы бирелгән кисемтәдән $\sqrt{3}$ тапкыр кечерәк булган кисемтә төзегез.

Математик диктантлар[1]

МД—1

1 нче вариант

1. Әгәр дүртпочмак почмакларының өчесе үзара тигез, ә дүртенчесе аларның берсеннән 40° ка кечерәк булса, аның почмакларын табыгыз.
2. *ABCD* параллелограммында $\angle C = 40°$. *E* ноктасы *BC* ягында ята, өстәвенә $\angle BAE = 20°$, $EC = 2$ см, $AB = 10$ см. *AD* ны табыгыз.
3. *ABCD* параллелограммында *AB* ягы 10 см га тигез. *AC* һәм *BD* диагональләре *O* ноктасында кисешәләр һәм алар тиңдәшле рәвештә 14 см һәм 10 см га тигез. *AOB* өчпочмагының периметрын табыгыз.
4. *ABCD* дүртпочмагында $AB = CD$ һәм $AB \parallel CD$; $\angle CBD = 15°$. *BDA* почмагы күпмегә тигез?
5. *ABCD* параллелограммының *AB* һәм *CD* якларында *A* һәм *C* түбәләреннән үзара тигез *AF* һәм *CE* кисемтәләре салынган. *FBED* дүртпочмагында $\angle BFD = 50°$. *BED* почмагы күпмегә тигез?
6. *ABCD* турыпочмаклыгында диагональләр *O* ноктасында кисешәләр; $\angle COD = 60°$, $CD = 10$ см. Турыпочмаклыкның диагональләре күпмегә тигез?
7. Ромб түбәләренең берсеннән үткәрелгән биеклекләр арасындагы почмак 30° ка тигез. Ромбның биеклеге 5 см га тигез. Ромбның периметрын табыгыз.
8. Квадратның үзәгеннән аның якларына кадәр ераклыклар суммасы 20 см га тигез. Квадратның периметры күпмегә тигез?
9. Тигезьянлы *ABCD* трапециясендә (*AD* һәм *BC* — нигезләр) диагональләр үзара перпендикуляр. $BE \perp AD$; $ED = 4$ см. Трапециянең биеклеге күпме?
10. Турыпочмаклы *ABC* өчпочмагында $\angle A = 45°$ ($\angle C = 90°$); *E* — *AB* ның уртасы. *E* ноктасы аша *AC* га параллель туры үткәрелгән, ул *BC* ны *F* ноктасында кисеп үтә; $EF = 10$ см. *BC* ны табыгыз.

---

[1] Математик диктантларның дәреслек пунктлары буенча бүленеше:
МД—1. Дүртпочмаклар. V бүлек
МД—2. Мәйдан. VI бүлек
МД—3. Охшаш өчпочмаклар. VII бүлек
МД—4. Әйләнә. VIII бүлек
МД—5. Векторлар. IX бүлек

2 нче вариант

1. Әгәр дүртпочмакның өч почмагы үзара тигез, ә дүртенчесе аларның берсеннән 80° ка зуррак булса, аның почмакларын табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында $\angle B = 140^\circ$. F ноктасы BC ягында ята, өстәвенә $\angle ADF = 70^\circ$, $BF = 5$ см, $AD = 20$ см. AB ны табыгыз.
3. Параллелограммның диагональләре O ноктасында кисешәләр. BC ягы 18 см га тигез, $BD = 16$ см. BOC өчпочмагының периметры 38 см га тигез. AC диагоналенең озынлыгын табыгыз.
4. $ABCD$ дүртпочмагында $BC = AD$ һәм $BC \parallel AD$, $\angle BAC + \angle ACD = 80^\circ$. Бу почмакларны табыгыз.
5. $ABCD$ параллелограммының AD һәм BC якларында B һәм D түбәләреннән тигез BE һәм DF кисемтәләре салынган. $AECF$ дүртпочмагында диагональләр O ноктасында кисешәләр; $AC + EF = 30$ см. $AO + OF$ ны табыгыз.
6. $ABCD$ турыпочмаклыгының диагональләре O ноктасында кисешәләр; $\angle ACD = 60^\circ$, $BD = 10$ см. CD ягы күпмегә тигез?
7. Ромбның биеклеге аның ягын уртага бүлә. Ромбның ниндидер бер түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре арасында почмак күпмегә тигез?
8. Квадратның периметры 80 см га тигез. Аның үзәгеннән ягына кадәр ераклык күпмегә тигез?
9. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) диагональләр үзара перпендикуляр; $BK \perp AD$, $BK = 7$ см. KD кисемтәсенең озынлыгы күпмегә тигез?
10. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында $\angle B = 45^\circ$ ($\angle C = 90^\circ$), O — AB ның уртасы, O ноктасы аша AC га параллель туры үткәрелгән. Ул BC ны K ноктасында кисеп үтә; $BC = 18$ см. OK кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

МД—2

1 нче вариант

1. Квадратның ягы 4 см га тигез. Аның диагоналендә яңа квадрат төзелгән. Аның мәйданы ... тигез.
2. $ABCD$ параллелограммының диагонале $AC = 12$ см, ә ягы $AD = 10$ см; $\angle CAD = 30^\circ$. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
3. $ABCD$ параллелограммының AC диагоналендә M ноктасы алынган. BMC өчпочмагының мәйданы Q га тигез. MCD өчпочмагының мәйданы күпмегә тигез?
4. Өчпочмакларның нигезләре тигез, ә бер өчпочмакның биеклеге икенче өчпочмакның биеклегеннән өч тапкыр зуррак. Бу өчпочмакларның мәйданнарының чагыштырмасын табыгыз.

5. *ABC* өчпочмагында *AE* һәм *BD* — биеклекләр; $AC = 10$, $BD = 8$, $BC = 16$. *AE* ны табыгыз.
6. Турыпочмаклы *ABCD* трапециясендә (*AD* һәм *BC* — нигезләр) $\angle CDA = 90°$, $BC = 2$ см, $AD = 6$ см, $AB = 10$ см, $\angle A = 30°$. Трапециянең мәйданы ... тигез.
7. Турыпочмаклыкның диагонале 25 кә, ә бер ягы — 15 кә тигез. Аның белән тигез зурлыктагы тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның катетларын табыгыз.
8. *ABC* өчпочмагында $AB = m$, $BC = n$ $(n > m)$; *BD* — өчпочмакның биеклеге һәм $BD = h$. *AC* ны табыгыз.
9. Ромб почмакларының берсе 60° ка, кечерәк диагонале $\sqrt{3}$ кә тигез. Ромбның биеклеге ... тигез.
10. Өчпочмакның яклары 7, 24 һәм 25 кә тигез. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.

2 нче вариант

1. Квадратның диагоналендә мәйданы 8 см^2 булган яңа квадрат төзелгән. Квадратның ягы ... тигез.
2. *ABCD* параллелограммында диагональ $AC = 10$ см, ә *B* түбәсеннән бу диагональгә кадәр ераклык аның озынлыгыннан ике тапкыр кечерәк. Параллелограммның мәйданын табыгыз.
3. *ABCD* параллелограммында *BD* диагоналенең *D* ноктасы артына дәвамында *P* ноктасы алынган. *ADP* өчпочмагының мәйданы *S* ка тигез. *CDP* өчпочмагының мәйданы күпмегә тигез?
4. Өчпочмакларның биеклекләре тигез, берсенең нигезе икенчесеннән ике тапкыр кечерәк. Бу өчпочмакларның мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.
5. *ABC* өчпочмагында *BD* һәм *CF* — биеклекләр; $BD = 12$, $CF = 10$, $AC = 5$. *AB* ны табыгыз.
6. Турыпочмаклы трапециядә (*AD* һәм *BC* — нигезләр) $\angle CDA = 90°$; $\angle A = 45°$, $BC = 2$, $CD = 6$. Трапециянең мәйданы ... тигез.
7. Турыпочмаклыкта диагональләрнең кисешү ноктасыннан түбәсенә кадәр һәм аның якларының берсенә кадәр ераклыклар тиңдәшле рәвештә 6,5 һәм 6. Аңа тигез зурлыктагы квадратның ягын табыгыз.
8. Турыпочмаклы *ABC* өчпочмагында ($\angle C = 90°$) *D* ноктасы *BC* ягында ята; $AB = a$, $AD = b$, $AC = m$. *BD* ны табыгыз.
9. Ромб почмакларының берсе 60° ка, биеклеге $\sqrt{3}$ кә тигез. Кечерәк диагоналенең озынлыгын табыгыз.
10. Өчпочмакның яклары 8, 15 һәм 17 гә тигез. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.

МД—3

1 нче вариант

1. ABC өчпочмагында $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$. AD — A почмагының биссектрисасы. ABD өчпочмагының мәйданы 9 см². ACD өчпочмагының мәйданы ... тигез.
2. ABC һәм MPL өчпочмакларында $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle L$; $\frac{AB}{MP} = \frac{2}{3}$, $AC = 10$ см. ML ягы ... тигез.
3. ABC өчпочмагының AB һәм BC якларында тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталары алынган; $\frac{EB}{BF} = \frac{BC}{AB}$, $\angle BFE = 40°$. A почмагы күпмегә тигез?
4. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{5}{2}$. Бу өчпочмакларның мәйданнары суммасы 58 см² га тигез. Һәр өчпочмакның мәйданын табыгыз.
5. ABC өчпочмагында AE һәм BF медианалары O ноктасында кисешәләр. ABC өчпочмагының мәйданы 12 см² га тигез. ABO өчпочмагының мәйданын табыгыз.
6. ABC өчпочмагының мәйданы 12 см² га тигез; DE — урта сызык ($D \in AB$; $E \in BC$). $ADEC$ трапециясенең мәйданын табыгыз.
7. CK — турыпочмаклы ABC өчпочмагының биеклеге ($\angle C = 90°$); $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. AKC һәм BKC өчпочмакларының мәйданнары нинди чагыштырмада була?
8. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = 12$, $AC = 10$. $\cos\angle A$ һәм $\sin\angle ABD$ ны табыгыз.
9. $ABCD$ ромбында $\angle A = \alpha$; $AC = d$. Ромбның ягын табыгыз.
10. Параллелограммның диагональләре m һәм n га, алар арасындагы почмак 60° ка тигез. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

2 нче вариант

1. ABC өчпочмагында BM — биссектриса. ABM һәм CBM өчпочмакларының мәйданнары 1 : 3 чагыштырмасында. $AB = 4$ см. BC ягы ... тигез.
2. EPF һәм CDK өчпочмакларында $\angle P = \angle D$ һәм $\angle F = \angle K$; $\frac{EP}{CD} = \frac{2}{5}$, $DK = 10$ см. PF ягы ... тигез.
3. ABC өчпочмагының AB һәм BC якларында тиңдәшле рәвештә D һәм K нокталары алынган; $\frac{BD}{BC} = \frac{BK}{AB}$; $\angle BCA = 50°$. BDK почмагы күпмегә тигез?

4. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{9}{16}$, $AC + A_1C_1 = 14$ см. Бу якларны табыгыз.
5. ABC өчпочмагында BK һәм CD медианалары O ноктасында кисешәләр. COK өчпочмагының мәйданы 30 $см^2$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
6. EF — ABC өчпочмагының урта сызыгы ($E \in AB$; $F \in AC$). $EBCF$ трапециясенең мәйданы 9 $см^2$ га тигез. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
7. CD — турыпочмаклы ABC өчпочмагының биеклеге ($\angle C = 90°$); $\frac{S_{ADC}}{S_{CDB}} = \frac{25}{36}$. AC һәм CB катетлары нинди чагыштырмада?
8. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $AB = BC$; $BD \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 48$. $\sin\angle A$ һәм $\cos\angle ABD$ ны табыгыз.
9. $ABCD$ ромбында $\angle A = \alpha$, ромбның ягы a га тигез. AC диагоналең табыгыз.
10. Параллелограммның диагональләре d_1 һәм d_2 гә, алар арасындагы почмак 45° ка тигез. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

МД—4

1 нче вариант

1. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\angle B = 60°$, $BC = \sqrt{3}$. Үзәге A ноктасында булырлык итеп, радиусы 2,7 гә тигез булган әйләнә үткәрелгән. Бу әйләнәнең BC турысы белән ничә уртак ноктасы бар?
2. Үзәге O ноктасында булган әйләнә бирелгән. Әйләнәнең радиусы 5 см га тигез. l турысы әйләнәгә A ноктасында орына. Орынмада A ноктасыннан 12 см га тигез булган AB кисемтәсе салынган. OB кисемтәсе әйләнәне K ноктасында кисеп үтә. KB кисемтәсе ... тигез.
3. M ноктасыннан үзәге O ноктасындагы әйләнәгә MA һәм MB орынмалары үткәрелгән (A һәм B — орыну ноктлары). Әйләнәнең радиусы $2\sqrt{3}$, $\angle AMB = 60°$. Орыну ноктлары арасында AB ераклыгы ... тигез.
4. Әйләнәгә камалган 45° лы BAC почмагы BC дугасына таяна. Әйләнәнең радиусы a га тигез. BOC өчпочмагының мәйданын табыгыз (O — әйләнә үзәге).
5. AB — әйләнә хордасы. l турысы әйләнәгә A ноктасында орына. l турысында, $\angle MAB$ җәенке булырлык итеп, M ноктасы алынган. Әйләнәгә камалган ACB почмагы AB дугасына таяна һәм 20° ка тигез. MAB почмагы күпмегә тигез?

6. Әйләнәгә C ноктасыннан AB диаметрына CK перпендикуляры төшерелгән; $AK = 2$, $CK = 4$. KB кисемтәсе күпмегә тигез?
7. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 5 кә һәм 12 гә тигез. Өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусы ... тигез.
8. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясенә әйләнә камалган (AD һәм BC — нигезләр); $CD \perp AD$, $\angle A = 30°$, $CD = 10$ см. Трапециянең периметры ... тигез.
9. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Өчпочмакны камаган әйләнәнең радиусын табыгыз.
10. Трапеция әйләнәгә камалган. Аның почмакларының берсе 40° ка тигез. Трапециянең калган почмаклары ... тигез.

2 нче вариант

1. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Үзәге B ноктасында һәм радиусы 2,2 гә тигез булган әйләнә үткәрелгән. Бу әйләнәнең AC турысы белән ничә уртак ноктасы булыр?
2. l турысы O үзәкле әйләнәгә P ноктасында орына. Әйләнәнең радиусы 8 см га тигез. Орынмада P ноктасыннан PM кисемтәсе салынган. OM кисемтәсе әйләнәне F ноктасында кисеп үтә; $FM = 9$ см. PM кисемтәсе ... тигез.
3. P ноктасыннан O үзәкле әйләнәгә PA һәм PB орынмалары (A һәм B — орыну нокталары) үткәрелгән; $\angle APB = 90°$. Орыну нокталары арасындагы AB ераклыгы $\sqrt{5}$ кә тигез. OP ераклыгы күпмегә тигез?
4. O үзәкле әйләнәгә 30° ка тигез булган BAC почмагы камалган; $BC = a$. BOC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
5. PK — әйләнә хордасы. m турысы әйләнәгә P ноктасында орына. m турысында, $\angle FPK = 160°$ булырлык итеп, F ноктасы сайлап алынган. PDK почмагы әйләнәгә камалган һәм PK дугасына таяна. PDK почмагы күпмегә тигез?
6. Әйләнәдә ятучы P ноктасыннан EF диаметрына PK перпендикуляры төшерелгән; $EK = 4$, $KF = 9$. PK кисемтәсе күпмегә тигез?
7. Өчпочмакның яклары 13, 13 һәм 24 кә тигез. Өчпочмакка камалган әйләнәнең радиусы ... тигез.
8. Турыпочмаклы $ABCD$ трапециясенә әйләнә камалган (AD һәм BC — нигезләр); $CD \perp AD$, $\angle A = 30°$. Трапециянең периметры 24 см га тигез. AB һәм CD яклары күпмегә тигез?
9. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $\angle B = \beta$, $AC = b$. Өчпочмакны камаган әйләнәнең радиусын табыгыз.
10. Трапеция әйләнәгә камалган. Аның бер почмагы 160° ка тигез. Трапециянең калган почмаклары ... тигез.

МД—5

1 нче вариант

1. $ABCD$ параллелограммында AC һәм BD диагональләре O ноктасында кисешәләр. $M \in AD$.
   1) Күрсәтелгән векторларның кайсылары коллинеар: $\overline{AM}$ һәм $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ һәм $\overline{MD}$, $\overline{AO}$ һәм $\overline{CA}$?
   2) Күрсәтелгән векторларның кайсылары тигез: $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$, $\overline{BO}$ һәм $\overline{OD}$, $\overline{AC}$ һәм $\overline{BD}$?
2. Векторлар суммасын табыгыз: $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA}$.
3. $\overline{FK}$ ын $\overline{EF}$ һәм $\overline{EK}$ аша күрсәтегез.
4. k нинди кыйммәтләр алганда тигезлек дөрес була: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = k(\overline{DE} + \overline{EA})$?
5. $\bar{a} \neq \bar{0}$ һәм $\bar{b} \neq \bar{0}$ векторлары коллинеар түгел. Тигезлектән x һәм y ны табыгыз: $3\bar{a} + 5\bar{b} = x\bar{a} + (2y+1)\bar{b}$.
6. $ABCD$ параллелограммында $K \in AD$, өстәвенә $\frac{AK}{KD} = \frac{1}{2}$, P — AB ның уртасы. $\overline{BK}$ векторын $\overline{BP}$ һәм $\overline{BC}$ векторлары аша күрсәтегез.
7. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) $AB = 10$; $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CM}$. $|\overline{CM}|$ ен табыгыз.
8. O ноктасыннан $\overline{OA} = \bar{a}$ һәм $\overline{OB} = \bar{b}$ векторлары салынган. AOB почмагының биссектрисасы буенча баручы нинди дә булса $\overline{OM}$ векторын табыгыз.
9. $ABCD$ трапециясендә (BC һәм AD — нигезләр) EF — урта сызык. $\overline{EF}$ ын $\overline{BC}$ һәм $\overline{DA}$ аша күрсәтегез.
10. Почмагы 30° булган тигезьянлы трапециягә әйләнә камалган. Трапециянең урта сызыгы 12 гә тигез. Камалган әйләнәнең радиусы күпмегә тигез?

2 нче вариант

1. $ABCD$ параллелограммының AC һәм BD диагональләре O ноктасында кисешәләр, $E \in AB$.
   1) Күрсәтелгән векторларның кайсылары коллинеар: $\overline{BE}$ һәм $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ һәм $\overline{BE}$, $\overline{OD}$ һәм $\overline{DB}$?
   2) Күрсәтелгән векторларның кайсылары тигез: $\overline{AD}$ һәм $\overline{BC}$, $\overline{OA}$ һәм $\overline{OC}$, $\overline{AB}$ һәм $\overline{AD}$?
2. Векторларның суммасын табыгыз: $\overline{CD} + \overline{FK} + \overline{DF} + \overline{KC}$.
3. $\overline{KM}$ векторын $\overline{PM}$ һәм $\overline{PK}$ векторлары аша күрсәтегез.
4. k нинди кыйммәтләр алганда тигезлек дөрес була: $\overline{PK} + \overline{KE} + \overline{EC} = k(\overline{AP} - \overline{AC})$?

5. $\bar{a} \neq \bar{0}$ һәм $\bar{b} \neq \bar{0}$ векторлары коллинеар түгел. x һәм y ны түбәндәге тигезлектән табыгыз:

$$(2x - 6)\bar{a} + 3\bar{b} = 2\bar{a} + (y - 3)\bar{b}.$$

6. $ABCD$ параллелограммында $E \in BC$, өстәвенә $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$, F — AB ның уртасы. $\overline{AE}$ векторын $\overline{AF}$ һәм $\overline{AD}$ векторлары аша күрсәтегез.
7. $ABCD$ параллелограммында $BD = 14$; $2\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{BC}$. $\overline{BF}$ ны табыгыз.
8. O ноктасыннан $\overline{OA} = \bar{m}$ һәм $\overline{OB} = \bar{n}$ векторлары чыга. AOB почмагы белән вертикаль почмак биссектрисасы буенча баручы нинди дә булса $\overline{OM}$ векторын табыгыз.
9. $ABCD$ трапециясендә (BC һәм AD — нигезләр) PK — урта сызык. $\overline{PK}$ ын $\overline{CB}$ һәм $\overline{AD}$ аша күрсәтегез.
10. Почмагы 30° булган тигезьянлы трапециягә 6 см радиуслы әйләнә камалган. Трапециянең урта сызыгын табыгыз.

АЕРУЧА КАТЛАУЛЫ МӘСЬӘЛӘЛӘР

(Санкт-Петербургта үткәрелгән математика олимпиадалары материаллары буенча)

1. Өчпочмакның җәенке почмагыннан чыккан медиананың озынлыгы бу өчпочмак периметрының чирегеннән кечерәк булуын исбатлагыз.
2. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләр) $AB = BC$, $AC = CD$ һәм $BC + CD = AD$. Трапециянең почмакларын табыгыз.
3. A почмагының тышында алынган M ноктасыннан аңа ике кисүче туры үткәрелгән, аларның берсе почмакның якларында ике тигез AB һәм AC кисемтәләрен кисеп ала, ә икенчесе бу якларны тиндәшле рәвештә D һәм E нокталарында кисеп үтә. $\frac{BD}{CE} = \frac{MD}{ME}$ булуын исбатлагыз.
4. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында $\angle BAC = \angle CBD$ һәм $\angle ACD = \angle BDA$. $AC^2 = BC^2 + AD^2$ булуын исбатлагыз.
5. M — мәйданы S ка тигез булган ABC өчпочмагында AD медианасының уртасы. BM турысы AC ягын F ноктасында кисеп үтә. AMF өчпочмагының мәйданын табыгыз.
6. Трапециянең урта сызыгы диагональләрнең берсе белән k чагыштырмасында ($0 < k < 1$) бүленә һәм трапецияне ике кисәккә бүлә, аларның кечерәгенең мәйданы S ка тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.
7. ABC өчпочмагының C түбәсендәге почмак туры. A һәм C түбәләреннән үткәрелгән медианаларның озынлыклары $\sqrt{\frac{17}{5}}$ гә тигез. Катетларның озынлыклары чагыштырмасын табыгыз.
8. Турыпочмаклы ABC өчпочмагы ($\angle C = 90°$) бирелгән һәм анда CD биеклеге үткәрелгән; $AB = c$; $DB = n$; $DA = m$. $\frac{m}{P_{ADC}} + \frac{n}{P_{DBC}} + \frac{c}{P_{ABC}} = 1$ булуын исбатлагыз.
9. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы c га, камалган әйләнәнең диаметры d га тигез. $d \leqslant c(\sqrt{2} - 1)$ булуын исбатлагыз.
10. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында ($\angle C = 90°$) — CK биеклеге, ә ACK өчпочмагында CE биссектрисасы үткәрелгән. $CB = BE$ булуын исбатлагыз.
11. ABC өчпочмагы эчендә P ноктасы $S_{ABP} = S_{BCP} = S_{ACP}$ булырлык итеп алынган. P өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы булуын исбатлагыз.
12. Ике әйләнә бер-берсенә A ноктасында орыналар. Беренче әйләнәгә B ноктасында, икенчесенә C ноктасында оры-

нучы үзара параллель ике орынма үткәрелгән. A ноктасы орынмалар арасында ятмый. BAC почмагының туры булуын исбатлагыз.

13. Ике әйләнә A һәм B нокталарында кисешәләр. A ноктасы аша AC һәм AD кисемтәләре үткәрелгән, аларның һәркайсы бер әйләнәнең хордасы буларак икенче әйләнәгә орына. $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$ булуын исбатлагыз.

14. Ике әйләнә бирелгән турыга бирелгән ике ноктада орына. Бу әйләнәләрнең орыну нокталары күплеген табыгыз.

15. O үзәкле әйләнә түбәсе C булган туры почмакның якларына M һәм N нокталарында орына. Ниндидер K ноктасында әйләнәгә орынма үткәрелгән, ул CM һәм CN кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталарында кисеп үтә. $(AB + AC) \cdot (AB + BC)$ зурлыгының K ноктасы торышына бәйле булмавын исбатлагыз.

16. $ABCD$ трапециясенең (AD һәм BC — нигезләр) ян якларын диаметр итеп төзелгән түгәрәкләр бер-берсенә орыналар. Трапециягә әйләнә камарга мөмкин булуын исбатлагыз.

17. ABC өчпочмагында $\angle B = \angle C = 40°$. BD кисемтәсе B почмагының биссектрисасы булса, $BD + DA = BC$ булуын исбатлагыз.

18. Дүртпочмакның ике каршы ягының урталарын тоташтыручы кисемтә калган ике ягының ярымсуммасына тигез булса, бу дүртпочмакның трапеция булуын исбатлагыз.

19. ABC өчпочмагы бирелгән. Аның якларында $AKLB$, $AMNC$ һәм $BCQP$ параллелограммнары төзелгән. KM, LP һәм QN кисемтәләреннән өчпочмак төзеп булуын исбатлагыз.

20. Өчпочмакның биссектрисалары, кисешү ноктасында түбәдән исәпләгәндә, бер үк чагыштырмада бүленәләр. Өчпочмакның тигезьяклы булуын исбатлагыз.

ҖАВАПЛАР ҺӘМ КҮРСӘТМӘЛӘР

Мөстәкыйль эшләр

М—1

1 *вар.* **2.** 140°.

2 *вар.* **2.** 5.

3 *вар.* **1.** Периметрлары тигез.

4 *вар.* **1.** Периметрлары тигез.

5 *вар.* **1.** Периметрлары тигез. **2.** $\frac{2n-2}{n-2} = k$, моннан $2 + \frac{2}{n-2} = k$. Димәк, $n-2=1$ яки $n-2=2$. k так булуын исәпкә алып, $k=3$ икәнен табабыз.

6 *вар.* **1.** Периметрлары тигез.

2. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. Җавап. $k = 2$.

7 *вар.* **1.** Юк, булмый. n-почмаклыкның диагональләре саны $\frac{n(n-3)}{2}$ булуын исбатларга мөмкин. Ул вакытта $n(n-3) = 50$ яки $n(n-3) = 2 \cdot 5 \cdot 5$, ә бу мөмкин түгел.

2. Кабарынкы куппочмакның һәр түбәсе янында берәрләп алынган тышкы почмакларының суммасы 360° ка тигез булуын исбатларга мөмкин. Ул вакытта мондый өчпочмакның 170° тан зуррак булган тышкы почмаклары икедән артык була алмый. Бу градуслы үлчәме 10° тан ким булган кысынкы почмаклар саны икедән артык була алмавын аңлата. Мондый ике почмак булу очрагы 1°, 2°, 177° лы почмаклары булган өчпочмакта гына тормышка ашарга мөмкин.

8 *вар.* **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. Җавап. Бар, тугызпочмакның 27 диагонале була. **2.** $n = 6$.

М—2

1 *вар.* **1.** 28 см. **2.** 30°, 120°.

2 *вар.* **1.** 10 см. **2.** 30°, 150°.

3 *вар.* **2.** 60°, 120°; $BM = AH$

4 *вар.* **2.** 60°, 120°; $AM = CK$.

5 *вар.* **1.** Башта $OK = OM$ икәнен исбатлагыз.

2. $MOHC$ дүртпочмагында $\angle MOH = 155°$, $\angle OHC = 85°$, $\angle OMC = 90°$. Димәк, $\angle C = 30°$. Ул вакытта $MD = 0{,}5CD$ һәм $MD = 0{,}5AB$. Параллелограммның почмаклары 30° ка һәм 150° ка тигез.

6 *вар.* Мәсьәләләр 5 нче вариант мәсьәләләренә аналогия буенча чишеләләр.

2. Параллелограмм почмаклары 60° ка һәм 120° ка тигез.

7 *вар* **1.** Бер-бер артлы $\Delta BOE = \Delta KOD$, $\Delta BDE = \Delta BKE$, $ED \parallel BK$, $ED = BK$, $\Delta BKE = \Delta BED$, $\angle BKE = \angle BDE$, $\angle KEB = \angle DBE$ икәнен исбатлыйбыз. Димәк, $OB = OE$.

2. $ADEH$ һәм $KDEB$ параллелограммнарында $AH = DE$ һәм $KB = DE$. Димәк, $AH = KB$. Моннан $AK = HB$ була.

8 *вар.* **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә, $\angle KBE = 90°$.

2. Башта $EK = BD = MP$ икәнен исбатлагыз.

М—3

5 *вар.* **1.** $\Delta MBK = \Delta KCE$, $AMEC$ — параллелограмм һәм $MK = KE$ икәнен исбатлагыз.

2. $ABMK$ һәм $MKDC$ дүртпочмакларының параллелограмм икәнлеген исбатлагыз.

6 *вар.* Мәсьәләләр 5 нче вариант мәсьәләләренә аналогия буенча чишелә.

7 *вар.* **1.** Бер-бер артлы $\Delta BPK = \Delta MED$, $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $ABCD$ — параллелограмм икәнлеген исбатлыйк.

2. $AO = OE$ булырлык итеп, OC кисемтәсендә E ноктасын билгелик. Ул вакытта $ABED$ дүртпочмагы параллелограмм була. Өчпочмакның тышкы почмагы турындагы теореманы кулланып, $\angle BED > \angle BCD$ икәнлеген исбатлыйк. Димәк, $\angle BAD > \angle BCD$.

8 *вар.* Мәсьәләләр 7 нче вариант мәсьәләләренә аналогия буенча чишеләләр. 2 нче мәсьәләдә каршы куеп исбатлау методы белән исбатлагыз.

М—4

1 *вар.* **1.** 60°, 120°, 50°, 130°. **2.** 20 см.
2 *вар.* **1.** 60°, 120°, 40°, 140°. **2.** 30 см.
3 *вар.* **1.** 40°, 140°. **2.** 1:2.
4 *вар.* **1.** 60°, 120°. **2.** 1:2.

5 *вар.* **1.** $AE = AD - ED = AD - 0{,}5(AD - BC) = 0{,}5(AD + BC)$

2. $\angle A = 90°$, AD — зур нигез, O — диагональләренең кисешү ноктасы, $\angle ABD = 60°$, $\angle AOD = 90°$ булган $ABCD$ трапециясе бирелгән булсын. Ул вакытта $\angle ADO = \angle CBO = 30°$, $AD = 2AO$, $BC = 2CO$. Димәк, $AC = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

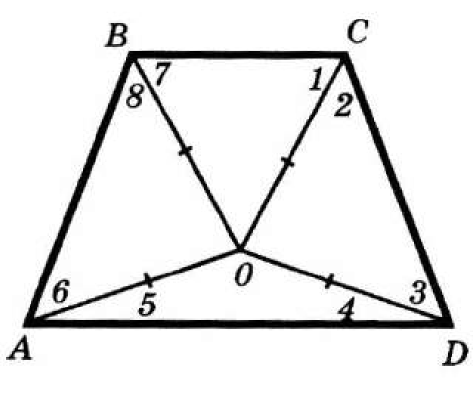
6 *вар.* **1.** Трапециянең диагональләре кисешү ноктасы O аша BC һәм AD турыларына тиңдәш рәвештә OK һәм OM перпендикулярларын үткәрик. Ул вакытта $OK = 0{,}5BC$ һәм $OM = 0{,}5AD$, чөнки BOC һәм AOD өчпочмаклары тигезьянлы һәм турыпочмаклы. Димәк, $KM = 0{,}5(AD + BC)$.

2. Зур нигезне нур белән кисешкәнче озынайтыгыз.

7 *вар.* **1.** $ABCD$ трапециясендә AD зур нигез булсын. B түбәсе аша CD га параллель һәм AD ны E ноктасында кисүче туры үткәрик. Ул вакытта $AE < AB + BE$. Димәк, $AB + CD > AD - BC$.

2. AD һәм BC нигезле $ABCD$ трапециясендә O ноктасы барлык яклардан да бертигез ераклыкта урнашкан булсын. BC, CD, AD, BA турыларына тиңдәш рәвештә OK, OM, OP, OE перпендикулярларын үткәрик. Өчпочмаклар тигезлегеннән $KC = MC$ булуы килеп чыга. Аналогия буенча $MD = PD$, $AP = AE$, $BE = BK$. Димәк, $BC + AD = AB + CD$.

8 *вар.* **1.** $ABCD$ трапециясендә AD зур нигез булсын. AD кисемтәсенең D түбәсе артына дәвамында, BD һәм CE турылары параллель булырлык итеп, E ноктасын билгелик. Ул вакытта $AC + CE > AE$. Димәк, $AC + BD > AD + BC$.



Рәс. 43

2. 43 нче рәсемдә $ABCD$ — трапеция. O ноктасы трапеция түбәләреннән бертигез ераклыкта ята. Күппочмакның почмаклары суммасы турындагы теорема буенча $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$. Ләкин $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 8$. Димәк, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$, ягъни $\angle BCD + \angle BAD = 180°$. Аналогия буенча $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

М—5

5 *вар.* **1.** Эзләнелә торган параллелограммның бирелгән диагонале бүлеп килеп чыккан өчпочмакларның берсе ике ягы һәм аларның берсенә үткәрелгән биеклеге буенча төзелә. Аннан соң төзелгән өчпочмакны параллелограмм итеп төзеп бетерәләр.

2. Зур нигезе AD булган тигезьянлы $ABCD$ трапециясен AC кисемтәсе, BAD почмагы һәм BC турысына үткәрелгән AK перпендикуляры буенча төзергә кирәк булсын ди. Башта AKC өчпочмагын катеты һәм гипотенузасы буенча төзибез, аннан соң KC турысына параллель итеп, AD турысын үткәрәбез һәм KC кисемтәсендә, $\angle BAD$ бирелгән кыйммәткә тигез булырлык итеп, B ноктасын билгелибез. Аннан соң ABC өчпочмагын трапеция итеп төзеп бетерәбез.

6 *вар.* **1.** O ноктасы диагональләренең кисешү ноктасы булган $ABCD$ параллелограммын төзергә кирәк булсын ди. AOB өчпочмагы ике ягы һәм аларның берсенә үткәрелгән биеклеге буенча төзелә. Аннан соң өчпочмак параллелограмм итеп төзеп бетерелә.

7 *вар.* **1.** Бирелгән диагональ параллелограммны бүлеп барлыкка килгән өчпочмакларның берсе ике ягы һәм шуларның берсенә каршы ятучы почмагы буенча төзелә. Аннан соң өчпочмак параллелограмм итеп төзеп бетерелә.

2. Зур нигезе AD, диагональләре кисешү ноктасы O булган $ABCD$ трапециясен AC, BD, CD кисемтәләре һәм AOD почмагы буенча төзергә кирәк булсын ди. $EO \in AD$, $CE \parallel BD$ булган CAE өчпочмагын карыйк. Бу өчпочмакта $BD = CE$, $\angle ACE = \angle AOD$. Димәк, CAE өчпочмагын ике ягы һәм алар арасындагы почмак буенча төзергә мөмкин. D ноктасын үзәге C түбәсендә һәм радиусы CD булган әйләнә үткәреп табарга мөмкин. Аннан соң ACD өчпочмагы трапеция итеп төзеп бетерелә.

8 *вар.* **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

2. Мәсьәләдә **М—4** 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча төзүләр башкарыла.

М—6

1 *вар.* **1.** 140°. **2.** 75°. 3 *вар.* **1.** 5 см. **2.** 90°.

4 *вар* **1.** 60°. **2.** 90°.

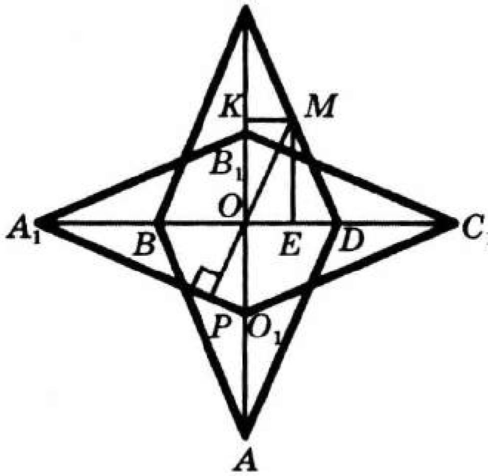
5 *вар.* **1.** $2KE = KD$. Димәк, $\angle ADB = 30°$ һәм ABO өчпочмагы тигезьяклы, O — турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасы, $AP = 0{,}5AM$. Димәк, $AP = 0{,}25AO$, $AP : PC = 1 : 7$.

2. Мәсьәлә шартыннан $MK = AC/2$, $AP = AC/4$ икәне күренә. AC кисемтәсендә, $EC = AP$ булырлык итеп, E ноктасын билгелик. Ул вакытта $PE = MK$ һәм $\Delta APM = \Delta EKC$. Димәк, $PMKE$ дүртпочмагы параллелограмм, чөнки аның капма-каршы ятучы яклары парлап тигез. Ләкин AME һәм CPK өчпочмаклары тигезлегеннән $PK = ME$ була. Моннан $PMKE$ — турыпочмаклык һәм $\angle PMK = 90°$ икәне килеп чыга.

6 *вар.* **1.** $BO : PH = 1 : 4$. **2.** 90°. Мәсьәләләр 5 нче вариантның 1, 2 нче мәсьәләләренә аналогия буенча чишеләләр.

7 *вар.* **1.** O — бирелгән турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасы булсын ди. Ул вакытта $\angle ACD = 75°$, $\angle EDC = 90°$, $\angle EOD = 30°$, $ED = OD/2 = BD/4$, $BE < ED + BD = 5ED$.

2. Әйләнә BD турысын P ноктасында кисеп үтсен ди. Ул вакытта $AECP$ дүртпочмагы турыпочмаклык була, $\angle AEC = 90°$. Өчпочмакның тышкы



Рәс. 44

почмагы үзлеге ярдәмендә $\angle ABC = \angle AEC + \angle BAE + \angle BCE = 150°$ икәнен исбатлап була. Димәк, $\angle BAD = 30°$. Эзләнелә торган ераклык 5 см га тигез.

8 *вар.* **1.** $\angle MKE = 15°$. Димәк, $ME = EK$ һәм $MT = TK$. Моннан $PT > 0{,}5KH > 0{,}49KH$.

2. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәлә сенә аналогия буенча чишелә, $HB = 10$ см.

М—7

1 *вар.* **1.** 15° 30′, 74° 30′, 90°.

2 *вар.* **1.** 90°, 73° 30′, 147°.

3 *вар.* **1.** 90°. **2.** $3a$.

4 *вар.* **1.** 90°. **2.** $2a$.

5 *вар.* **1.** AC диагонале ромбның ягы белән 30° лы почмак төзүен исбатлагыз, $\angle AOB = 120°$.

2. AKD һәм MCD өчпочмаклары тигез. Димәк, $\angle MDK + \angle AKD = 90°$. Ләкин OKD өчпочмагының тышкы почмагы үзлеге буенча $\angle AOD = \angle AKD + \angle MDK$. Димәк, $\angle AOD = 90°$, $\angle AMO = 60°$.

6 *вар.* Мәсьәләләр 5 нче вариантның 1, 2 нче мәсьәләләренә аналогия буенча чишелә. Җавап. **1.** a. **2.** $MP = AK$.

7 *вар.* **1.** 44 нче рәсемдә мәсьәлә шартында бирелгән ромблар сурәтләнгән, $CM = MD$. MPD_1 почмагының туры булуын исбатларга кирәк. $MK \perp OC$, $ME \perp OD$ ны үткәрик. $\Delta CKM = \Delta MED$ булганга, $ME = OK = CK$ һәм $\angle MCO = \angle MOC$. Димәк, $\angle POD_1 = \angle OCM$. Ул вакытта $\angle POD_1 + \angle PD_1O = 90°$, $\angle PD_1O = \angle ODC$ һәм $OP \perp A_1D_1$

2. ME, CO, PD — AB турысына перпендикулярлар булсын ди. Ул вакытта $\Delta MAE = \Delta AOC$ һәм $\Delta BOC = \Delta BPD$ икәнен исбатларга мөмкин, өстәвенә $ME = AO$, $PD = BO$.

8 *вар.* **1.** O_1 — $AB_1C_1D_1$ ромбының диагональләре кисешү ноктасы булсын. Ул вакытта $AOEO_1$ дүртпочмагы квадрат була, һәм OO_1 турысында PO кисемтәсе бар. A һәм E нокталары квадратның икенче диагоналенең очлары була. Димәк, $PA = PE$.

2. TC һәм AB турылары O ноктасында кисешсен ди. $\angle MTC = \alpha$ дип тамгалыйк. Ул вакытта $\angle TCP = \alpha = \angle ACO$. ACB һәм MCT өчпочмаклары ике катет буенча тигез. Димәк, $\angle OBC = \alpha$; $\angle OCB = 90 - \alpha$. Шуңа күрә $\angle COB = 90°$.

М—8

5 *вар.* **2.** Башта $\angle ABE = 90°$, $\angle BAE = \frac{90°}{4}$ һәм AE ягы буенча ABE өчпочмагын төзегез, ә аннан соң бу өчпочмакны квадрат итеп төзеп бетерегез.

6 *вар.* **2.** Башта MBD почмагы, $180° - \angle MBD - 45°$ ка тигез булган BMD почмагы һәм $BM = PQ$ ягы буенча BMD өчпочмагын төзегез. Аннан соң бу өчпочмакны квадрат итеп төзеп бетерегез.

7 *вар.* **1.** AC диагонале һәм P периметры буенча $ABCD$ турыпочмаклыгын төзергә кирәк булсын ди. BC ягының B түбәсе ягына дәвамында, $AB = MB$ тигезлеге үтәлерлек итеп, M ноктасын билгелик. Ул чакта AMC өчпочмагын $P/2$ гә тигез булган MC ягы, AC ягы һәм 45° ка тигез булган M почмагы

буенча төзергә мөмкин. Аннан соң AMC өчпочмагы турыпочмаклык итеп төзеп бетерелә.

2. $ABCD$ квадратын төзергә кирәк булсын ди. BD диагоналендә $MD = AD$ булырлык итеп M ноктасын алабыз. Ул чакта BMA өчпочмагында $BM = BD - AD$, $\angle ABD = \frac{90°}{2}$, $\angle BMA = \frac{5}{4} \cdot 90°$. Башта BMA өчпочмагын төзибез, аннан соң аны квадрат итеп төзеп бетерәбез.

8 *вар.* **1.** Диагональләре кисешү ноктасы O, кечкенә диагонале AC булган $ABCD$ ромбын төзергә кирәк булсын ди. OB кисемтәсендә, $OM = OC$ булырлык итеп, M ноктасын алабыз. Ул чакта $\angle BMC = \frac{3}{4} \cdot 90°$; $BM = \frac{BD - AC}{2}$. Димәк, башта BMC өчпочмагын төзергә, аннан соң аны ромб итеп төзеп бетерергә мөмкин.

2. $ABCD$ квадратын төзергә кирәк булсын ди. AC кисемтәсен A түбәсе ягына дәвам итеп, анда $AE = AD$ кисемтәсен салыйк. ECD өчпочмагын $AC + AD$ га тигез булган EC ягы, $\angle E = \frac{90°}{4}$, $\angle ECD = \frac{90°}{2}$ буенча төзергә мөмкин. Аннан соң бу өчпочмакны квадрат итеп төзеп бетерәбез.

М—9

1 *вар.* **1.** $(a + b + c)(l + f) - f^2 + \frac{bd}{2}$. Турыпочмаклы өчпочмак формасындагы кисем мәйданы, бу өчпочмакны турыпочмаклык итеп төзеп бетереп, исәпләнә дип уйлыйбыз. **2.** 6 см.

2 *вар.* **1.** $f^2 + (a + b + c)l - \frac{bd}{2}$. Турыпочмаклы өчпочмак формасындагы кисем мәйданы өчпочмакны турыпочмаклык итеп төзеп бетереп исәпләнә.

2. 16 см.

3 *вар.* **2.** 100 см^2. 4 *вар.* **2.** 60 см^2.

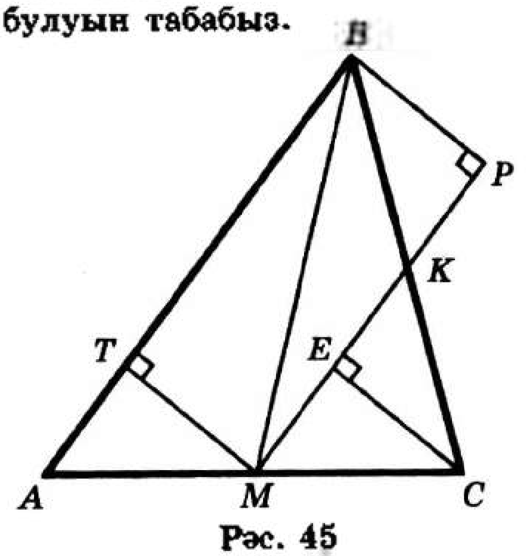
5 *вар.* **1.** ADE һәм BDE өчпочмакларының һәрберсен турыпочмаклык итеп төзеп бетерегез.

2. Ромб диагональләренә параллель һәм аның түбәләре аша үтүче турылар үткәрегез.

6 *вар.* Мәсьәләләр 5 нче вариант мәсьәләләренә аналогия буенча чишелә.

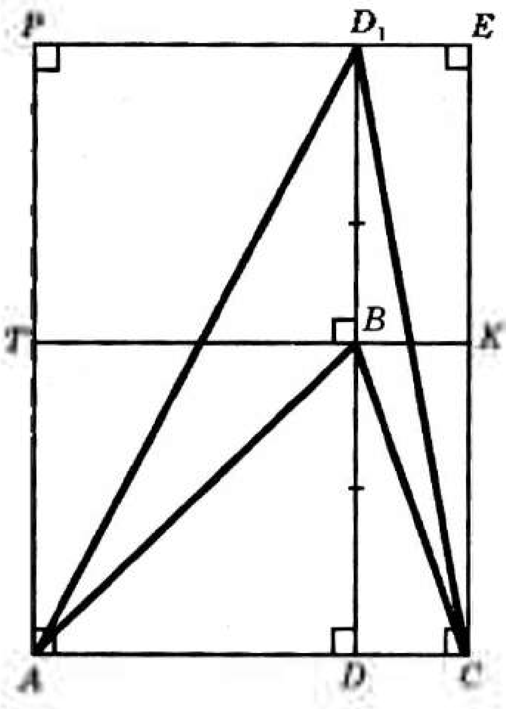
7 *вар.* **1.** ABC өчпочмагында BM — медиана булсын ди. Әгәр $BA = BC$ булса, мәсьәләнең чишелеше ап-ачык. $AB > BC$ булсын. M ноктасы аша $MP \parallel AB$ турысын һәм MT, CE, BP перпендикулярларын үткәрик (рәс. 45). Ул чакта $\Delta TBM = \Delta BPM$, $\Delta ATM = \Delta MCE$, $\Delta EKC = \Delta BKP$. Моннан ABM һәм BMC өчпочмакларының мәйданнары тигез булуын табабыз.

2. BCD өчпочмагыннан $\angle CBD = 45°$ табабыз. $\angle ABC = 135°$ булганга, $\angle ABD = 90°$. Димәк, $ABPK$ параллелограммы турыпочмаклык була, $\angle ADB = 45°$. Моннан $AB = BD$ һәм $AB : BP = 2 : 3$. $ABPK$ турыпочмаклыгының периметрын белеп, аның мәйданы 54 см^2 икәнен табабыз.



Рәс. 45

8 *вар.* **1.** Өстәмә төзүләр 46 нчы рәсемдә күрсәтелгән. Килеп чыккан сызымны кулланып, AD_1C өчпочмагының мәйданы $APEC$ турыпочмаклыгы мәйданының яртысына тигез, ә ABC өчпочмагының мәйданы $ATKC$



Рәс. 46

дүртпочмагы мәйданының яртысына тигез булуын исбатларга мөмкин. Ләкин *ATKC* һәм *APEC* турыпочмаклыкларының мәйданнары 1 : 2 чагыштырмасында.

2. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. Җавап. 30 см.

М—10

1 *вар.* **1.** 20 $см^2$.
2 *вар.* **1.** 77 $см^2$.
3 *вар.* **1.** 45°, 135°.

2. Турыпочмаклык мәйданы параллелограмм мәйданыннан зуррак.

4 *вар.* **1.** 30°, 150°.

2. Квадрат мәйданы параллелограмм мәйданыннан зуррак.

5 *вар.* **1.** Параллелограммның почмаклары 45° һәм 135° булуын табабыз. Моннан аның мәйданы 20 $см^2$ га тигез була.

2. $S_{AEMH} : S_{BPMK} = AE : BK$, $S_{BPMK} : S_{TMOC} = PB : OC$. Язылган тигезлекләрне тапкырлап һәм $AE = OC$ булуын исәпкә алып исбатланырга тиешлене табабыз.

6 *вар.* **1.** $\angle MDB = 2\angle MBD = 15°$. Димәк, ромбның кысынкы почмагы 30°, ә аның биеклеге 10 см. Ромб ягы 20 см га тигез булуын табабыз. Җавап. 200 $см^2$.

2. $S_{AMOT} : S_{MBHO} = OT : OH = S_{TOPD} : S_{OHCP}$, моннан исбатларга тиешлене табабыз.

7 *вар.* **1.** $\angle P = 90°$, $PM < PK$ булган *PMK* өчпочмагы бирелсен ди. 47 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, *KTEM* параллелограммын өстәмә төзик. Ул вакытта бу параллелограммның мәйданы бер яктан *bc* га, икенче яктан $MP \cdot a$ га тигез. Моннан $PM = \frac{bc}{a}$ булуын табабыз.

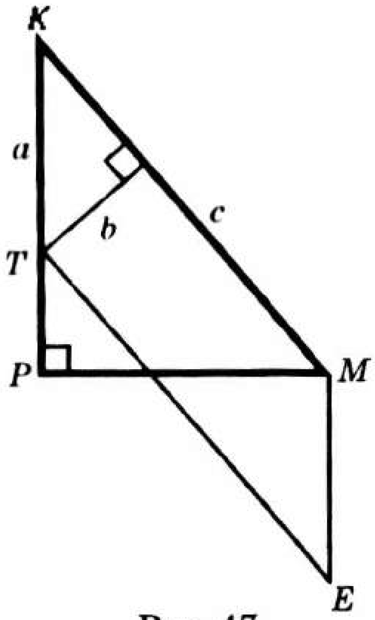
2. *ABCD* параллелограммының мәйданы *AMKD* параллелограммы мәйданына тигез, чөнки бу параллелограммнар өчен *AD* нигезе уртак һәм биеклекләре тигез. Аналогия буенча *AMKD* һәм *EPKD* параллелограммнарының мәйданнары да тигез. Ул вакытта *ABCD* һәм *EPKD* параллелограммнарының мәйданнары тигез. *EMCD* дүртпочмагы бу параллелограммнар өчен уртак. Моннан таләп ителгәнне исбатлап була.

8 *вар.* **1.** $\angle M = 90°$, $MP = b$, $PK = c$, $KE = a$ булган турыпочмаклы *MPKE* трапециясе бирелсен ди. 48 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, $PT \parallel KE$, $PO \perp KE$ үткәрик. Ул вакытта *TPKE* параллелограммының мәйданы бер яктан $PO \cdot a$ га, икенче яктан $b \cdot c$ га тигез. Димәк, $PO = \frac{bc}{a}$.

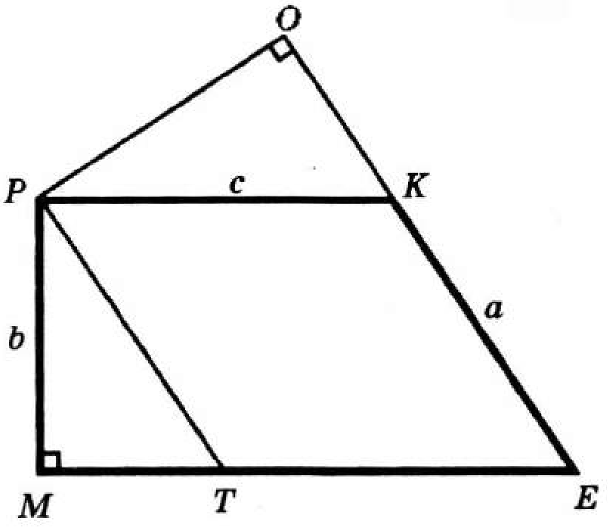
2. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

М—11

1 *вар.* **1.** 24 $см^2$. **2.** 8 $см^2$.
2 *вар.* **1.** 25 $см^2$. **2.** 6 $см^2$.
3 *вар.* **1.** 1 : 2. **2.** 6 $см^2$.
4 *вар.* **1.** Мәйданнар тигез. **2.** 12 $см^2$.



Рәс. 47



Рәс. 48

5 *вар.* **1.** Параллелограммның капма-каршы якларына үткәрелгән бу өчпочмакларның биеклекләре суммасы параллелограммның биеклегенә тигез булуын исбатлагыз.

2. $MC = x$ булсын ди. Ул чакта, ACB өчпочмагының мәйданын төрле ысуллар белән күрсәтеп, $\frac{6x}{2} + \frac{14x}{2} = 42$ тигезләмәсен табабыз. Моннан $x = \frac{21}{5}$ см була.

6 *вар.* **1.** Мәсьәлә 5 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

2. COD өчпочмагының мәйданы 16 см^2 га тигез. Аннан соң AOB һәм COD өчпочмакларының мәйданнары тигез булуын исбатларга мөмкин.

7 *вар.* **1.** $ABCD$ дүртпочмагында диагональләр O ноктасында кисешсен һәм $\angle AOB = 30°$ булсын ди. AC турысына BK һәм DE перпендикулярларын үткәрик. Ул чакта дүртпочмак мәйданы

$$\frac{BK\cdot AC}{2} + \frac{DE\cdot AC}{2} = \frac{AC}{2}(BK + DE) = \frac{AC}{2}\left(\frac{BO}{2} + \frac{OD}{2}\right) = \frac{AC\cdot BD}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

2. $S_{EMH} = \frac{1}{3} S_{EBC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{S}{6}$.

8 *вар.* **1.** ABC өчпочмагында O — биссектрисалар кисешү ноктасы булсын ди. O ноктасының өчпочмакның һәр ягыннан да 1,5 см ераклыкта торуын исбатларга мөмкин. Ул чакта $S_{ABC} = \frac{1{,}5AB}{2} + \frac{1{,}5BC}{2} + \frac{1{,}5AC}{2} = \frac{1{,}5}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1{,}5}{2}\cdot 16 = 12$ см^2.

2. $S_{AMP} : S = (AM\cdot AP) : (AB\cdot AC) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}$. Димәк, $S_{AMP} = \frac{2}{9}$. Аналогия буенча $S_{PKC} = \frac{2}{9}S$, моннан эзләнелә торган мәйдан $\frac{5}{9}S$ ка тигез.

М—12

1 *вар.* **1.** 4 см. **2.** 54 см^2.
2 *вар.* **1.** 5 см. **2.** 72 см^2.
3 *вар.* **1.** 13,5 см^2. **2.** 54 см^2.
4 *вар.* **1.** 24 см^2. **2.** 18 см^2.

5 *вар.* 1. *O* ноктасыннан *AD*, *CD*, *BC* якларына тиңдәшле рәвештә *OP*, *OK*, *OM* перпендикулярларын үткәрик. $OP = OK = OM$ икәнен исбатларга мөмкин. *OKD* өчпочмагыннан $OK = a/2$ не табабыз. Ул чакта трапециянең мәйданы $0{,}5\ a(b + c)$ була.

3. *MPH* һәм *PHK* өчпочмакларының мәйданнары тигез икәнен исбатларга мөмкин. Ул чакта трапеция мәйданы $S_1 + S_2$ гә тигез.

6 *вар.* 1. $AB \perp MH$ һәм $MB = BH$ булганга күрә, $AM = AH$ була; $HA \perp MK$, чөнки $MH = HK$ һәм $AM = AK$. Димәк, *HA* кисемтәсе трапециянең биеклеге була һәм ул $a/2$ гә тигез. Трапециянең мәйданы $a(a + b)/4$ кә тигез.

2. *ABCD* трапециясенең *AC* диагонален үткәрик. Ул чакта $S_{ABC} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$. Трапециянең мәйданы $S_1 + S_2$ гә тигез.

7 *вар.* 1. *O* ноктасының трапециянең барлык түбәләреннән дә бертигез ераклыкта ятуын исбатларга мөмкин. Ул вакытта М—4 8 нче вариантның 1 нче мәсьәләсеннән $\angle A = 30°$ булуы килеп чыга. Трапеция мәйданы $a(b + c)/4$ кә тигез була.

2. *O* ноктасы аша *MK* га параллель, *MH* һәм *PK* кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә *E* һәм *T* нокталарында кисүче туры үткәрик. $AE \parallel PK$, $BT \parallel MH$ икәнен исбатларга мөмкин. Шулай итеп, трапеция *HOP* өчпочмагына тигез булган 8 өчпочмакка бүленә. Моннан трапеция мәйданы 40 $см^2$ га тигез булуы килеп чыга.

8 *вар.* 1. *O* ноктасының трапециянең барлык якларыннан да бертигез ераклыкта урнашканлыгын исбатларга мөмкин. Ул чакта М—4 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсеннән $PK + MH = b + c$ икәне килеп чыга. Трапеция мәйданы $a(b+c)/2$ була.

2. *AOB* һәм *COD* өчпочмакларының мәйданнары тигез икәнлеген исбатларга мөмкин. Ул чакта $S_{AOB} : S_{BOC} = S_{AOD} : S_{DOC}$, моннан $S^2_{AOB} = S^2_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC} = 100$ икәнен табабыз. Җавап. 45 $см^2$.

М—13.

1 *вар.* 1. 50 $см^2$. 2. 90°, 60°, 30°.
2 *вар.* 1. 162 $см^2$. 2. 90°, 45°, 45°.
3 *вар.* 1. 216 $см^2$. 2. 105°.
4 *вар.* 1. 99 $см^2$. 2. 75°.

5 *вар.* 1. Трапециянең биеклеге $\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ см. Трапециянең диагональләре үзара перпендикуляр булганлыктан, аның нигезләренең ярымсуммасы биеклеккә тигез (М—4 6 нчы вариантның 1 нче мәсьәләсен кара). Димәк, трапециянең мәйданы 100 $см^2$.

2. *ABCD* трапециясендә $AB = 9$ см, $BC = 15$ см, $DC = 12$ см, $AD = 30$ см булсын ди. $BE \parallel CD$ ($E \in AD$) турысын үткәрик. Ул чакта $EB = CD = 12$ см, $ED = BC$, $AE = 15$ см икәнлеген исбатларга мөмкин. Ул чакта, Пифогор теоремасына кире теорема буенча, $\angle ABE = 90°$ икәнлеген табабыз. Димәк, эзләнелә торган почмак туры.

6 *вар.* 1. Мәсьәлә М—4 5 нче вариантның 1 нче мәсьәләсен кулланып чишелә. Трапеция мәйданы 300 $см^2$ га тигез.

2. *ABCD* трапециясендә $AD = 10$ см, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см, $BD = 12$ см булсын ди. *C* түбәсе аша *AD* нурын *E* ноктасында кисүче һәм *BD* га параллель туры үткәрик. Ул чакта $CE = BD$, $DE = BC$ икәнен исбатларга мөмкин. Пифагор теоремасына кире теорема буенча, $\angle ACE = 90°$ икәнен табабыз. Димәк, эзләнелә торган почмак шулай ук туры.

7 *вар.* 1. $BC^2 - CH^2 = AB^2 - AH^2$, $BC^2 = CH^2 + AB^2 - AH^2 = AC - AH^2 + AB^2 - AH^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AH$.

2. MEP өчпочмагында зур як c га тигез, $ME = a$, $EP = b$ булсын ди. Каршы куеп исбатлау методы буенча, MEP өчпочмагының җәенке почмаклы икәнен исбатлагыз. Чыннан да, MEP өчпочмагы турыпочмаклы була алмый, чөнки бу Пифогор теоремасына кире теоремага каршы килә. Әгәр MEP өчпочмагын кысынкыпочмаклы дип күз алдына китерсәк, бу вариантның 1 нче мәсьәләсе раславынча, $MP^2 < ME^2 + EP^2$, ә бу $c^2 > a^2 + b^2$ ка каршы килә. Димәк, MEP өчпочмагы да җәенке почмаклы.

8 *вар.* Мәсьәләләр 7 нче вариант мәсьәләләренә аналогия буенча чишелә.

М—14

1 *вар.* **1.** 9,5 см^2. **2.** 114 см^2.

2 *вар.* 1. 6 см^2. **2.** 126 см^2.

3 *вар.* 1. DEC, ABE, APE өчпочмакларының турыпочмаклы икәнен исбатларга кирәк. Күппочмак мәйданы 42 см^2. **2.** $5\sqrt{10}$ см^2.

4 *вар.* **1.** Мәсьәлә 3 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. Җавап. 42 см^2. **2.** 4,8 см.

5 *вар.* **1.** Өчпочмакның өченче почмагы 30° ка тигез. Кечкенә биеклек x ка тигез булсын ди. Зур ягы $x(\sqrt{3}+1)$ гә тигез булуын исбатларга мөмкин. $\frac{x^2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$ тигезләмәсен төзибез, моннан $x = \sqrt{2}$.

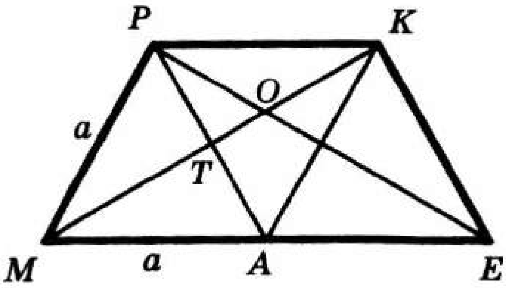
2. Ромбның кысынкы почмагы 60° ка тигез икәнлеген исбатларга кирәк. Җавап. $2\sqrt{3}$ см^2.

6 *вар.* 1. Мәсьәлә 5 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. Җавап. $10/(1+\sqrt{3})$.

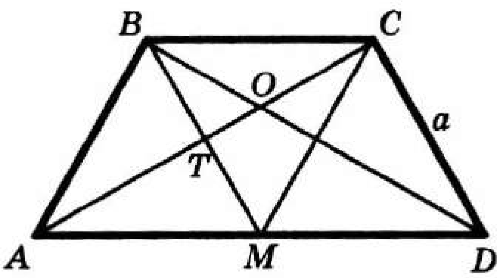
2. Мәйданы 78 см^2 булган $ABCD$ параллелограммы бирелгән булсын ди. BE һәм BK тиңдәшле рәвештә AD һәм BC якларына үткәрелгән биеклекләр. $BE = 6$ см, $BK = 7{,}8$ см. Параллелограмм мәйданы формуласын кулланып, $AD = 13$ см, $CD = 10$ см икәнен табабыз. ABE өчпочмагыннан $AE = 8$ см, ул чакта $ED = 5$ см һәм BED өчпочмагыннан $BD = \sqrt{61}$ см икәнен табабыз.

7 *вар.* **1.** 49 нчы рәсемдә мәсьәлә шартында әйтелә торган $MPKE$ трапециясе сурәтләнгән. O — APK өчпочмагының медианалары кисешү ноктасы булганлыктан, $PT = AT$ һәм $\Delta MTA = \Delta PTK$. Моннан $PK = a$ була. Аннан соң тигезьянлы $MPKE$ трапециясенең мәйданы җиңел табыла. Җавап. $3a^2\sqrt{3}/4$.

2. ABC өчпочмагында $AB = BC$, M һәм K тиңдәшле рәвештә AC һәм BC якларының урталары булсын ди. $BM = MK = 12$ см. $KP \perp BM$, $KE \perp AC$ үткәрик, $P \in BM$, $E \in MC$. Ул чакта P — BM ның уртасы, ягъни $BK = KM$. Моннан $\angle MBK = 60°$ була. ABC өчпочмагының мәйданы $144\sqrt{3}$ см^2 га тигез.



Рәс. 49



Рәс. 50

8 *вар.* **1.** 50 нче рәсемдә мәсьәлә шартында әйтелгән трапеция сурәтләнгән. O — BMC өчпочмагының биеклекләре кисешү ноктасы булганлыктан, $AC \perp BM$ була. Димәк, $AT = TC$. Аннан соң $\Delta ATM = \Delta BTC$. Моннан $AM = a = MD$ була. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясенең мәйданы $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ була.

2. $ABCD$ параллелограммында $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 15°$, $AD = 12$ см булсын ди. BD диагоналендә, $\angle BAK = 60°$ булырлык итеп, K ноктасын билгелик. Ул чакта $\angle AKB = 30°$, $\angle KAD = 15°$. $BA = x$ булсын ди. $AK = KD = 2x$, $BK = x\sqrt{3}$, $BD = x(\sqrt{3} + 2)$, $AD^2 = AB^2 + BD^2$ була. Ул чакта $x^2 + x^2 \cdot (\sqrt{3} + 2)^2 = 144$, моннан $x^2 = \frac{36}{2 + \sqrt{3}}$. Параллелограмм мәйданы $AB \cdot BD = x^2(\sqrt{3} + 2)$ яки 36 см² га тигез.

М— 15

1 *вар.* **1.** 6,25 см. **2.** 10 см, $4\frac{2}{7}$ см, $5\frac{5}{7}$ см.

2 *вар.* **1.** 5 дм. **2.** 12 см, $6\frac{2}{3}$ см, $5\frac{1}{3}$ см.

3 *вар.* **1.** 60 см. **2.** 62,4 см.

4 *вар.* **1.** 30 см. **2.** 90 мм.

5 *вар.* **2.** 84 мм. CE — C почмагының биссектрисасы икәнен исбатлагыз.

6 *вар.* **2.** 36 дм. BP — B почмагының биссектрисасы икәнен исбатлагыз.

7 *вар.* **1.** BD_1 — ABC почмагының биссектрисасы булсын ди. Ул чакта $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$. Шарт буенча $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$. Моннан $\frac{AD}{DC} > \frac{AD_1}{D_1C}$, $\frac{AD}{DC} + 1 > \frac{AD_1}{D_1C} + 1$, $\frac{AC}{DC} > \frac{AC}{D_1C}$. Ул чакта $DC < D_1C$ һәм $\angle ABD > \angle DBC$.

2. 16 см. BC ягын B ноктасы артына AB га тигез булган BD кисемтәсенә озынайтыйк. B түбәсе янындагы тышкы почмак биссектрисасы AC ягының дәвамын E ноктасында кисеп үтсен ди. $AE = DE$ һәм EB — DEC почмагының биссектрисасы икәнен исбатлау җиңел. Ул чакта $\frac{BC}{DB} = \frac{EA + AC}{DE}$. Моннан $AE = 16$ см икәнен табып була.

8 *вар.* **1.** $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ дип алсак, BD — ABC почмагының биссектрисасы икәнен исбатларга мөмкин. Әгәр $\frac{AD}{DC} < \frac{AB}{BC}$ булса, $\angle ABD < \angle DBC$ (М—15 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсен кара). Ике очракта да без шартка каршы килә торган нәтиҗәләр таптык. Шуңа күрә $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.

2. $87\frac{3}{11}$ см (М—15 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсен кара).

М—16

1 *вар.* **1.** 30. **2.** 2,5 см.

2 *вар.* **1.** $\angle T = 20°$, $\angle K = 40°$, $\angle P = \angle M = 120°$. **2.** 50 см².

3 *вар.* **1.** 15. **2.** 80 см², 180 см².

4 *вар.* **1.** $5\frac{5}{7}$ см. **2.** 65 дм, 52 дм.

5 *вар.* **1.** 6 см. **2.** 24 см².

6 вар. **1.** 46 см. **2.** 32 см².

7 *вар.* 30°, 60°, 90°. Түбәндәге очраклар була алмый: 1. $\angle ABC \neq 90°$ һәм $BK \perp AC$. 2. $\angle BKC$ җәенке (яки кысынкы). 3. $BK \perp AC$ һәм $\angle ABK = \angle KBC$.

Бу очракларның барысында да ABK һәм KBC өчпочмаклары охшаш

була алмый. Мөмкин булган бер вариант кала: $\angle ABC = 90°$ һәм $BK \perp AC$. $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$ булганга, $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{3}$ була. ABK һәм KBC өчпочмаклары охшашлыгыннан $\frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KC}$ икәнлеге килеп чыга. $AK = \frac{KC}{3}$ булганга, $KC = BK\sqrt{3}$ була. KBC өчпочмагыннан $BC^2 = BK^2 + 3BK^2$, ягъни $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$ була. Моннан $\angle BCK = 30°$.

8 *вар.* 40 $см^2$ (М—16 7 нче вариантын кара)

М—17

1 *вар.* **2.** $AB = 2,2$, $BC = 1,4$, $A_1C_1 = 4,4$.

2 *вар.* **2.** $BC = 4,8$, $DF = 1,6$, $DE = 1,1$.

3 *вар.* **2.** 1,2 см, 3,6 см.

4 *вар.* **2.** 8 см, 12 см.

5 *вар.* **2.** AK ны BC ның дәвамы белән E ноктасында кисешкәнче дәвам итәргә һәм $ABED$ ның параллелограмм икәнен исбатларга кирәк.

6 *вар.* **2.** AM ны BC ның дәвамы белән E ноктасында кисешкәнче дәвам итәргә һәм $ABED$ ның ромб икәнен исбатларга кирәк.

7 *вар.* **1.** AC кисемтәсен A ноктасы ягына таба AB га тигез булган AD кисемтәсенә дәвам итик. $\angle BDC = \angle ABC$ икәне ап-ачык. Ул чакта $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ һәм $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$; $BC^2 = CD \cdot AC$, $a^2 = (b + c)b$, ягъни $a^2 = bc + b^2$.

2. 48. $S_{AOE} = S_{CDE}$ Моннан $DE \parallel AC$ икәнлеге чыга. $S_{ADO} = 8$, ә $S_{DOE} = 4$ булганга, $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{1}$, $\Delta DOE \sim \Delta AOC$. Охшашлык коэффициенты $k = \frac{1}{2}$. Ул чакта $S_{AOC} = 16$ һәм $S_{ADEC} = 36$; $DE = \frac{1}{2}AC$ һәм $\Delta DBE \sim \Delta ABC$. Ул чакта $S_{ADEC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$. Моннан $S_{ABC} = 48$ була.

8 *вар.* **1.** A түбәсе аша BC га параллель һәм CE ның дәвамын F ноктасында кисеп үтүче туры үткәрик; $\Delta AEF \sim \Delta CEB$. Моннан $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{EF}{CE} = \frac{1}{2}$, чөнки шарт буенча $AE : EB = 1 : 2$, $AF = \frac{a}{2}$.

Турыпочмаклы CAF өчпочмагыннан $CF = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$; $CE = \frac{2}{3}CF = \frac{\sqrt{4b^2+a^2}}{3}$ була.

2. 24 (М—17 7 нче вариант 2 нче мәсьәләне кара).

М—18

1 *вар.* **2.** AB һәм DE турылары параллель.

2 *вар.* **2.** BC һәм DF турылары параллель.

5 *вар.* **1.** ABC һәм ACD өчпочмакларының охшашлыгын исбатларга кирәк.

2. $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ һәм $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ булганга, $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C_1$. Моннан $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$ һәм $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$ булганга, $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$. Моннан $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ икәнлеге килеп чыга. Моннан тыш, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, ә шуңа күрә $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

6 *вар.* **1.** *BDC* һәм *ABC* өчпочмакларының охшашлыгын исбатларга кирәк.

2. $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$ һәм $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$ булганга, $\Delta AOD \sim \Delta A_1O_1D_1$. Моннан $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, *O* һәм O_1 — *AC* һәм A_1C_1 нең уртасы булганга, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$ һәм $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$ булганга, $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ һәм $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ икәне килеп чыга. $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ икәнлеге җиңел исбатлана. Моннан $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

7 *вар.* **2.** *AC* ягын *A* ноктасы ягына *AB* га тигез булган *AD* кисемтәсенә дәвам итик. Шарт буенча $a^2 = b(c + b)$, ягъни $BC^2 = AC \cdot DC$, яки $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$; *ABC* һәм *DBC* өчпочмаклары өчен $\angle BCA$ уртак. Шуңа күрә $\Delta ABC \sim \Delta DBC$. Моннан $\angle A = 2\angle B$ булуы җиңел исбатлана.

8 *вар.* **1.** $\Delta ADB \sim \Delta BEC$. Моннан $\frac{AD}{BC} = \frac{DB}{BE}$ була. Ләкин $AB = BC$, шуңа күрә $\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BE}$. $\angle DBE = \angle DAB$ булуы җиңел исбатлана. Ул чакта $\Delta ADB \sim \Delta BDE$ һәм $\angle BDE = \angle ADB$.

2. 0,5. *AMP* һәм *KCT* өчпочмакларының охшаш булуын исбатларга кирәк. Моннан $KT \parallel MP$ һәм *MKTP* трапеция булуы килеп чыга. *MEP* һәм *KET* өчпочмакларының охшашлыгыннан $ME : ET = 1 : 2$ булуын табабыз.

М—19

1 *вар.* **1.** 28 см, $\angle KOA = \angle BCA$. **2.** 8 см.
2 *вар.* **2.** 27 см.
3 *вар.* **2.** 36.
4 *вар.* **2.** 108.
5 *вар.* **2.** 60 см².
6 *вар.* **2.** 0,8 см.

7 *вар.* **1.** *E* һәм *M* нокталарын туры кисемтәсе белән тоташтырыйк. M_1 — *CE* ның уртасы булсын ди. Ул чакта MM_1 — *EMC* өчпочмагының медианасы. $MM_1 \parallel AE$ булганлыктан, $MM_1 \perp CE$. Ул очракта ΔEMC — тигезьянлы һәм $\angle EMM_1 = \angle M_1MC$. MM_1 нең *BC* ягы белән кисешү ноктасын *F* хәрефе белән билгелик. Ул чакта *MFCD* — ромб һәм $\angle M_1MC = \angle CMD$. Моннан тыш, $\angle AEM = \angle EMM_1$. Моннан $\angle EMD = 3\angle AEM$. **2.** 72.

8 *вар.* **1.** *AE BC* турысын *P* ноктасында, ә *DF* — *T* ноктасында кисеп үтсен ди. *PBA* өчпочмагы тигезьянлы ($PB = BA$) һәм $BE \perp AE$. Моннан *E* — *AP* ның уртасы. Аналогия буенча *F* — *DT* ның уртасы. $EF \parallel PT$ икәнен исбатлау җиңел. *EF AB* ны *M*, ә *CD* ны *N* ноктасында кисеп үтсен ди. $EM = NF = a/2$, $MN = BC = a$ икәнен табабыз. Шуңа күрә $EF = 2a$. **2.** 12 см.

М—20

1 *вар*. 1. $\frac{1}{4}$. 2. 90 см^2.

2 *вар*. 1. $\frac{4}{9}$. 2. 54 см^2.

3 *вар*. 1. 200 см^2. 2. $4\frac{2}{13}$.

4 *вар*. 1. 156 см^2. 2. $4\sqrt{13} + 8$.

5 *вар*. 1. 30°, 60°. 2. 75 см^2. $\frac{S_{ABE}}{S_{AED}} = \frac{9}{16}$ һәм $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2}$ икәнен исәпкә алырга кирәк.

6 *вар*. 1. 60°, 120°, 90°, 90°. 2. $64\sqrt{3}$ см^2.

7 *вар*. 1. 150 см^2. *C* түбәсе аша *BD* га параллель турыны *AD* ның дәвамы белән *M* ноктасында кисешкәнче үткәрергә һәм *ACM* турыпочмаклы өчпочмагын карарга.

2. 30°. *ABM* ның турыпочмаклы өчпочмак икәнлеген исбатларга.

8 *вар*. 1. $10\sqrt{6}$ см (М—20 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә күрсәтмәләрне кара).

2. 60°, 120°, 60°, 120°.

М—21

5 *вар*. 2. A_1A һәм B_1B турылары кисешкән *M* ноктасын табарга. *MC* һәм *MD* турылары *n* турысын тиңдәш рәвештә C_1 һәм D_1 нокталарында кисәләр. C_1D_1 эзләнелә торган кисемтә икәнен исбатлау җиңел.

6 *вар*. A_1D һәм B_1C турыларының кисешү ноктасы *M* ны табарга. *AM* һәм *BM* турылары *b* турысын тиңдәш рәвештә D_1 һәм C_1 нокталарында кисә. C_1D_1 кисемтәсенең эзләнелә торган кисемтә икәнен исбатлау җиңел.

7 *вар*. 1. Периметрга тигез булган кисемтәне $2 : 3 : \sqrt{13}$ чагыштырмасында бүләргә һәм өч ягы буенча өчпочмак төзергә.

8 *вар*. 1. Периметрга тигез булган кисемтәне $4 : \sqrt{5} : \sqrt{5}$ чагыштырмасында бүләргә һәм өч ягы буенча өчпочмак төзергә.

М—22

1 *вар*. 1. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$. 2. 60°.

2 *вар*. 1. $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 2. 60°.

3 *вар*. 1. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$. 2. 30°, 60°.

4 *вар*. 1. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$. 2. 45°, 135°.

5 *вар*. 1. 60°, 30°, 90°. 2. $\frac{24}{5}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$.

6 *вар*. 1. 60°, 30°, 90°. 2. $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$.

7 *вар*. 1. α эзләнелә торган почмак булсын ди. Шарт буенча $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Моннан $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. Шуңа күрә $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{1}$ булган турыпочмаклы *ABC* өчпочмагын ($\angle C = 90°$) төзергә кирәк. Ул чакта $\angle A$ эзләнелә торган почмак була.

2. $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Тигезьянлы турыпочмаклы *ABD* өчпочмагын ($\angle ADB = 90°$) һәм *DBC* почмагы 30° ка тигез булган турыпочмаклы *BDC* өчпоч-

магын ($\angle BDC = 90°$) карыйк. A, D, C нокталары бер туры өстендә яталар ($A—D—C$). $\angle ABC = 75°$ икәне ачык. $AD = BD = 1$ булсын. Ул чакта $S_{ABC} = = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)$ (1). Икенче яктан, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 75° = = \frac{\sqrt{6}}{3}\sin 75°$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән җавап чыга: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

8 *вар.* **1.** **М—22** 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенең чишелешен кара.

2. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. $\angle A = 30°$ булган турыпочмаклы ABC өчпочмагын ($\angle C = 90°$) карыйк. AD өчпочмакның биссектрисасы булсын; $\angle DAC = 15°$. $BC = 1$ булсын ди, ул чакта $AB = 2$ һәм $AC = \sqrt{3}$. Өчпочмакның биссектрисасы үзлекләрен кулланып, $CD = 2\sqrt{3} - 3$ икәнен исбатларга мөмкин. ACD өчпочмагыннан $AD = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\sin 15° = \frac{DC}{AD} = = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ була.

М—23.

1 *вар.* **1.** $S = ab\sin\alpha$; 5,54. **2.** $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

2 *вар.* **1.** $S = \frac{h^2}{\sin\alpha}$; 376,16. **2.** $3\sqrt{6}$.

3 *вар.* **1.** $S = \frac{d^2}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 123,85. **2.** 82°23′, 7°37′.

4 *вар.* **1.** $S = 3a^2 \sin\alpha\cos\alpha$; 82,07. **2.** 63°41′.

5 *вар.* **1.** $h = \sqrt{2S\sin\alpha\cos\alpha}$; 6,44 **2.** 27°5′.

6 *вар.* **1.** $h = \sqrt{S\mathrm{tg}\,\alpha}$; 10,16. **2.** 28°13′.

7 *вар.* **1.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta}$; 11,36. **2.** 47°8′.

8 *вар.* **1.** $6a^2\sin\alpha\cos\alpha$; 886,24.

B түбәсе аша AD белән F ноктасында кисешкәнче CD га параллель туры үткәрәбез. $\angle ABF = 90°$ булганга, ABF өчпочмагы турыпочмаклы. E — AF ның уртасы булу шартыннан чыгып, $AF = 2a$, $AB = 2a\cos\alpha$ була. Трапециянең биеклеге $h = AB\sin\alpha = 2a\cos\alpha\sin\alpha$ була. Ул чакта трапеция мәйданы $S = 6a^2\sin\alpha\cos\alpha$.

2. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}$. C түбәсе янындагы почмагы α булган тигезьянлы ABC өчпочмагын карыйк, шул ук вакытта $\cos\alpha = m$, $BE \perp AC$. $\angle EBA = x$ дип билгелик. $BE = h$ булсын ди. CEB өчпочмагыннан $BC = AC = \frac{h}{\sin\alpha}$; $CE = = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha}$ була. AEB өчпочмагыннан $AE = h\,\mathrm{tg}x$. $AC = CE + EA$; $\frac{h}{\sin\alpha} = = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + h\,\mathrm{tg}x$. Моннан $\mathrm{tg}x = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}$.

М—24*

1 *вар.* **1.** $\frac{288}{49}$. **2.** $\frac{4}{3}$.

2 *вар.* **1.** $\frac{121}{4}$. **2.** $\frac{4}{3}$.

3 *вар.* **1.** $14\frac{34}{121}$. **2.** $\frac{4}{5}$.

4 *вар.* **1.** $47\frac{1}{49}$ см². **2.** $\frac{15}{17}$.

2. Турыпочмаклы AOB өчпочмагыннан $FB = \frac{BO^2}{AB}$ (1). Турыпочмаклы BOC өчпочмагыннан $BD = \frac{BO^2}{BC}$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән $\frac{FB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ була. Моннан тыш, DFB һәм ACB өчпочмакларында ABC почмагы уртак. Моннан $\Delta ABC \sim \Delta DFB$ икәне чыга, шуңа күрә $\angle ACB = \angle DFB$.

6 *вар*. 1. $6a^2(2-\sqrt{3})^2$.

2. Турыпочмаклы ADB өчпочмагыннан $EB = \frac{BD^2}{AB}$ (1) икәне чыга. Турыпочмаклы BDC өчпочмагыннан $FB = \frac{BD^2}{BC}$ (2) икәне чыга. (1) һәм (2) тигезлекләреннән $\frac{EB}{FB} = \frac{BC}{BA}$ була. EBF һәм ABC өчпочмакларында ABC почмагы уртак. Моннан $\Delta EBF \sim \Delta ABC$ була.

7 *вар*. 1. $\frac{ab^2\sqrt{3}}{4(b-2a)}$.

2. M ноктасы аша AC га параллель һәм AB һәм BC якларын тиңдәш рәвештә K һәм L нокталарында кисүче туры үткәрик. BD — медиана булганга күрә, $KM = ML$ икәнен исбатлау җиңел. KFM һәм AFC өчпочмаклары охшашлыгыннан $\frac{FM}{FC} = \frac{KM}{AC}$ икәнлеге килеп чыга. MEL һәм AEC өчпочмаклары охшашлыгыннан $\frac{EM}{AE} = \frac{ML}{AC}$ була, ләкин $KM = ML$. Шуңа күрә $\frac{FM}{FC} = \frac{EM}{AE}$, ягъни $\frac{FM}{MC} = \frac{EM}{MA}$. Ул чакта $\angle FME = \angle AMC$ булганга күрә, $\Delta FME \sim \Delta AMC$ була. Моннан $\angle EFM = \angle MCA$. Шуңа күрә $EF \parallel AC$.

8 *вар*. 1. $\frac{3ah^2}{2(2h-a\sqrt{3})}$. 2. $\frac{ab}{m}$. ABC өчпочмагында BD һәм AE биеклекләре O ноктасында кисешсеннәр, $\Delta BDC \sim \Delta AEC$. Моннан $\frac{BD}{AE} = \frac{DC}{EC}$ (1); $\Delta AEC \sim \Delta AOD$. Моннан $\frac{EC}{OD} = \frac{AE}{AD}$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән $BD = \frac{AD \cdot DC}{OD} = \frac{ab}{m}$.

М—25

1 *вар*. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 12 см.

2 *вар*. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 17.

3 *вар*. 1. DE турысы әйләнәгә орынма була. 2. 35 см.

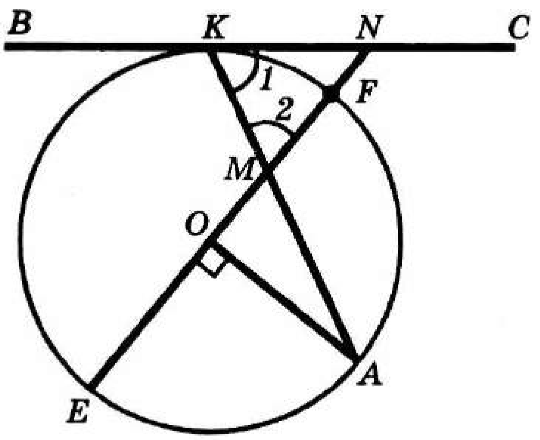
4 *вар*. 1. Әйләнә AB турысына орына. 2. 13,44.

5 *вар*. 1. BD турысы бу әйләнәгә орына. 2. $2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

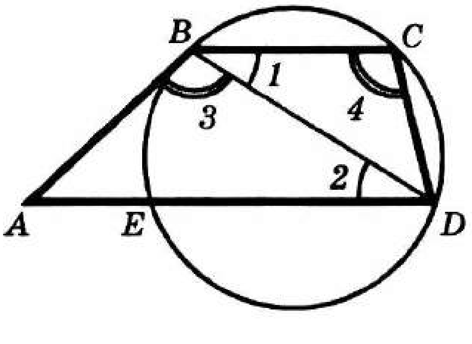
6 *вар*. 1. AB турысы бу әйләнәгә орына. 2. $\frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$.

7 *вар*. 2. O әйләнә үзәге булсын ди. ΔCOD турыпочмаклы икәнен исбатларга кирәк. CD ның әйләнә белән орыну ноктасына үткәрелгән әйләнәнең радиусы OK COD өчпочмагының биеклеге булып тора. Шуңа күрә $OK^2 = CK \cdot KD$, ләкин $AC = CK$ һәм $DB = KD$, ә шуңа күрә $OK^2 = AC \cdot DB$.

8 *вар*. 2. $\frac{3r\sqrt{3}}{2}$.



Рәс. 51



Рәс. 52

М—26

1 *вар.* **1.** $3\sqrt{3}$ см. **2.** 100°.

2 *вар.* **1.** 30°. **2.** 20°.

3 *вар.* **1.** 10 см. **2.** 6 см.

4 *вар.* **1.** 3. **2.** 288.

5 *вар.* **2.** 5 см.

6 *вар.* **2.** 220°, 80°, 60°.

7 *вар.* **1.** ABC почмагы әйләнә белән камалган һәм BD аның биссектрисасы (D әйләнәдә ята) булсын ди. DE хордасы AB га параллель. $DE = BC$ икәнен исбатларга кирәк. $DE \parallel AB$ һәм BD — ABC почмагының биссектрисасы булганга, $\angle ABD = \angle BDE = \angle DBC$; $\angle DCB = \angle DEB$ камалган һәм бер үк дугага таянганга күрә; $\Delta DCB = \Delta DEB$ — ике почмагы һәм бер ягы буенча. Моннан $DE = BC$.

2. $\angle 1$ KA дугасының яртысы белән үлчәнә (рәс. 51), $\cup KA = \cup KF + \cup FA = \cup KF + 90°$; $\angle 2$ KF һәм EA дугаларының ярымсуммасы белән үлчәнә, ләкин $\cup EA = 90°$. Моннан $\angle 1 = \angle 2$. Шуңа күрә ΔKNM тигезьянлы һәм $NK = NM$.

8 *вар.* **1.** $BC \parallel AD$ булганга, $\angle 1 = \angle 2$ (рәс. 52); $\angle 3$ BED дугасының яртысы белән үлчәнә; $\angle 4$ шул ук дуганың яртысы белән үлчәнә, шуңа күрә $\angle 3 = \angle 4$. Ул чакта ике почмагы буенча $\Delta ABD \backsim \Delta BCD$. Соңгы чишелеш ачык.

2. 16 см. ΔAED ның турыпочмаклы булуын исбатларга кирәк.

М—27

1 *вар.* **1.** 16 см. **2.** $\sqrt{15}$.

2 *вар.* **1.** 20. **2.** 6,5.

3 *вар.* **1.** 5.

4 *вар.* **1.** $4\sqrt{5}$.

5 *вар.* **1.** 8 см. E ноктасы BC хордасының яртысы булуын исбатлагыз.

6 *вар.* **1.** 10 см.

7 *вар.* **1.** $\frac{1}{3}$. $BC = 2r$, $AB = r$, $CD = \frac{3}{4} \cdot 2r = \frac{3}{2}r$. $O_1P \cdot O_1Q = O_1A \cdot O_1D$ булуын исәпкә алырга кирәк. $O_1Q = 2R - r$, $O_1P = r$, $O_1A = r + r = 2r$, $O_1D = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$ булганга, $(2R - r)r = 5r^2$ дип язабыз. Моннан $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

2. Кисүче һәм орынма турында теореманы кулланыгыз.

8 *вар.* **1.** 12; 1.

2. B һәм C нокталары аша үтүче һәм AB га B ноктасында орынучы әйләнә төзегез. Бу әйләнәнең AC ягын кисү ноктасы D эзләнелә торган нокта була.

М—28*

1 *вар.* **1.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$.

2 *вар.* **1.** $2r\sqrt{2}$.

3 *вар.* **1.** 8 см.

4 *вар.* **1.** 20.

5 *вар.* **1.** $3\sqrt{3}/2$. O һәм O_1 тиңдәшле рәвештә зур һәм кечкенә әйләнә үзәкләре булсын ди. $\angle AOC = 60°$, ә $\angle BO_1C = 120°$ булуын исбатларга кирәк. Моннан тыш, ACB өчпочмагы турыпочмаклы.

2. AD диаметрын үткәрик; ΔCDA турыпочмаклы, бер үк AC дугасына таянганга күрә, $\angle CDA = \angle CBA$. Моннан $\angle OAC = \angle BAH$ булуы килеп чыга.

6 *вар.* **1.** $\sqrt{63}$. O һәм O_1 — тиңдәшле рәвештә зур һәм кечкенә әйләнә үзәкләре булсын ди; $OO_1 = 3$. O ноктасы аша AB га параллель туры үткәрик. AB ның кечкенә әйләнә белән орыну ноктасын K аша тамгалыйк; O_1K үткәрелгән турыны P ноктасында кисә. OO_1P өчпочмагыннан $PO_1 = \frac{3}{2}$ була, чөнки шарт буенча $\angle POO_1 = 30°$; $OM \perp AB$, $OM = PK = PO_1 - KO_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. ΔAOM нан $AM = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2}$, $AB = \sqrt{63}$.

2. $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ икәнен исбатлагыз.

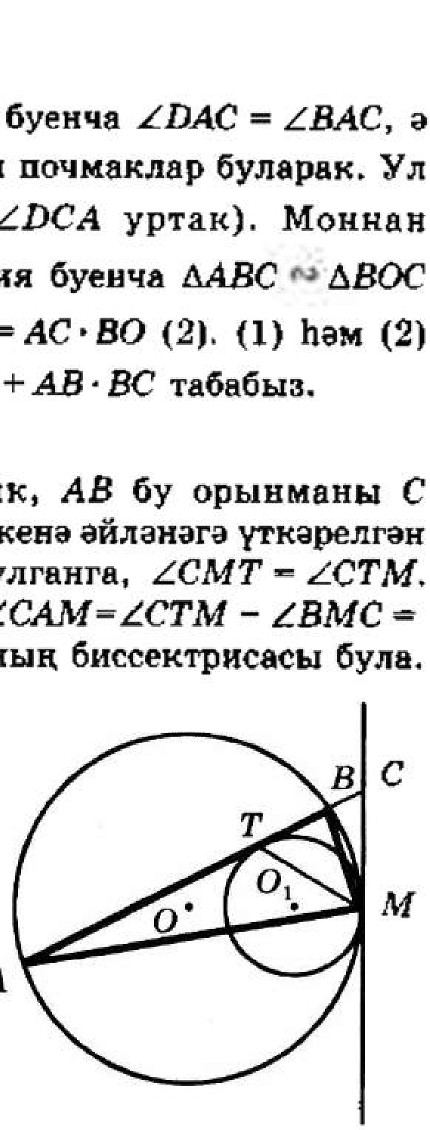
7 *вар.* **1.** $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$.

2. AC BD ны O ноктасында киссен ди; шарт буенча $\angle DAC = \angle BAC$, ә $\angle BAC = \angle BDC$ — бер үк дугага таянучы камалган почмаклар буларак. Ул вакытта ике почмак буенча $\Delta ADC \sim \Delta COD$ ($\angle DCA$ уртак). Моннан $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CD}$ һәм $AD \cdot BC = AC \cdot DO$ (1) була. Аналогия буенча $\Delta ABC \sim \Delta BOC$ икәнен исбатларга мөмкин. Ул вакытта $AB \cdot BC = AC \cdot BO$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләрен буынлап кушып, $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$ табабыз.

8 *вар.* **1.** $\frac{a}{5}$.

2. Ике әйләнәнең уртак орынмасын үткәрик, AB бу орынманы C ноктасында киссен ди (рәс. 53). C ноктасы аша кечкенә әйләнәгә үткәрелгән орынмаларның кисемтәләре буларак $CT = CM$ булганга, $\angle CMT = \angle CTM$. Моннан тыш, $\angle CAM = \angle BMC$, $\angle AMT = \angle CTM - \angle CAM = \angle CTM - \angle BMC = \angle CMT - \angle BMC = \angle BMT$. Моннан MT – $\angle AMB$ ның биссектрисасы була.

М—29



Рәс. 53

1 *вар.* **2.** 35.

2 *вар.* **1.** 12. **2.** 45.

3 *вар.* **1.** $m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. **2.** 2,4.

4 *вар.* **1.** 6.

5 *вар.* **1.** $\frac{a}{2}$. **2.** 30°.

6 *вар.* **1.** 25. **2.** $90° + \alpha$.

7 *вар.* **1.** Катеты ниндидер a га тигез булган ярдәмче турыпочмаклы өчпочмак

тәзибез, төзү юлы белән биссектрисалар һәм медианалар кисешкән нокталарны тоташтыручы кисемтәне табабыз. Бу кисемтәнең озынлыгы b га тигез булсын ди. Барлык тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмаклар охшаш. Эзләнелә торган өчпочмакның ягын x аша билгелик. Ул чакта $\frac{a}{x} = \frac{b}{m}$. Төзү юлы белән x кисемтәсен табабыз. Алга таба төзүләр ап-ачык. **2.** 11/12.

8 *вар.* **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә. **2.** 1/6.

М—30

1 *вар.* **1.** 1 см. **2.** 2,5 см. **3** *вар.* **1.** 3 см. **2.** 9,6 см.

2 *вар.* **1.** 6 см. **2.** 16 см. **4** *вар.* **1.** 2 см. **2.** 2 см.

5 *вар.* **1.** $6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2$.

2. 94,08 см². Камалган әйләнә үзәген O аша тамгаласак, ΔAOB ның турыпочмаклы булуын исбатларга кирәк. Бу өчпочмакның биеклеге трапециягә камалган әйләнә радиусына тигез. Трапециянең биеклеге бу әйләнәнең диаметрына тигез. Моннан тыш, $AD + BC = AB + CD$.

6 *вар.* **1.** 3 см. **2.** 18.

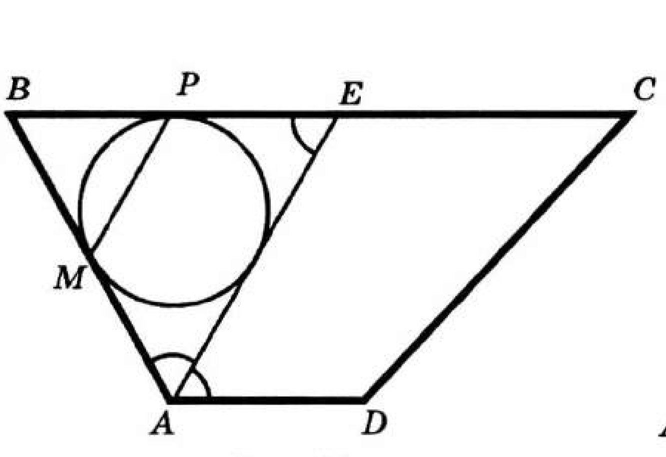
7 *вар.* **1.** $3(3-\sqrt{5})$.

2. 120°. $AB = BE$ һәм $BM = BP$ икәне ап-ачык (рәс. 54). Моннан $\frac{AB}{BM} = \frac{BE}{BP}$. Ул чакта $\Delta MBP \backsim \Delta ABE$. Өчпочмакларның охшашлыгыннан ΔBMP тигезьянлы һәм $\angle BMP = \angle BPM$ булуы күренә; чөнки шарт буенча $BM = MP$, ә $\angle BPM = \angle MPB$, шуңа күрә ΔMPB — тигезьяклы, ә шулай булгач, аңа охшаш ABE өчпочмагы да тигезьяклы һәм $\angle BAE = 60°$, ягъни $\angle BAD = 120°$.

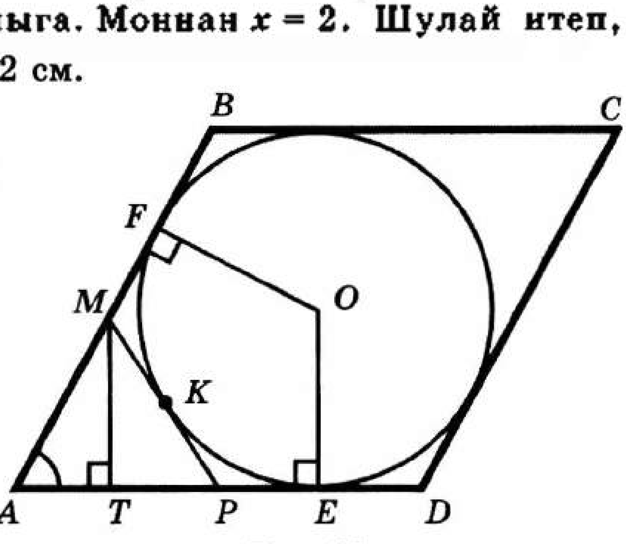
8 *вар.* **1.** $3-\sqrt{5}$ см.

2. $MB = PD = 2$ см. Камалган әйләнә радиусы $\sqrt{3}$ см һәм $AE = AF = 3$ см булуы ачык күренә (рәс. 55). Әйләнәнең бер ноктасыннан үткәрелгән орынмаларның үзлекләреннән чыгып, $AP + PK = AE$ һәм $AM + MK = AF$ була.

Бу тигезлекләрне кушып, $P_{AMP} = 6$ см булуын табабыз, ә $MP = 2$ см булганга, $AP + AM = 4$ см. MT ΔAMP ның биеклеге булсын. AM ны x аша билгелибез. Ул вакытта $MT = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $AT = \frac{x}{2}$, $PT = 4 - \frac{3x}{2}$. ΔMTP дан $\frac{3x^2}{4} + 16 - 12x + \frac{9x^2}{4} = 4$ килеп чыга. Моннан $x = 2$. Шулай итеп, $AM = AP = 2$ см. Ул чакта $MB = PD = 2$ см.



Рәс. 54



Рәс. 55

М—31

1 *вар.* **1.** 27. **2.** 96.

3 *вар.* **1.** 6,25 см. **2.** 40°, 50°, 50°.

2 *вар.* **1.** 13 см. **2.** 36 см.

4 *вар.* **1.** $4\sqrt{3}$ см. **2.** 0,5 см.

5 *вар.* **2.** 5 дм.

6 *вар.* **1.** *a*. **2.** $12\sqrt{3}$ см. *AD* ның камалган әйләнә диаметры булуын исбатларга кирәк.

7 *вар.* **1.** 56 нчы рәсемдә A_1, B_1, C_1 нокталары *BC*, *AC*, *AB* якларына карата биеклекләренең кисешү ноктасы *H* ка симметрик. $\Delta AC_1B = \Delta AHB$ икәне ачык. Моннан $\angle AC_1B = \angle AHB$, ләкин $\angle DHE = \angle AHB$. *EHDC* дүртпочмагында *HEC* һәм *HDC* почмаклары туры, шуңа күрә $\angle DHE + \angle BCA = 180°$. Моннан $\angle AC_1B + \angle BCA = 180°$. Бу C_1 ноктасы *ABC* өчпочмагын камаган әйләнә өстендә ята дигәнне аңлата. A_1 һәм B_1 нокталары өчен дә аналогия буенча фикер йөртергә була. **2.** bR_1/a.

8 *вар.* **1.** 57 нче рәсемдә H — AA_1, BB_1, CC_1 биеклекләренең кисешү ноктасы. AC_1HB_1 дүртпочмагы тирәли әйләнә камарга була; $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1$ — бер үк дугага таянучы, камалган почмаклар булганлыктан. Бу почмакларны α аша билгелик; $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$, $\angle BC_1A_1 = \angle BCA = 90° - \alpha$. Ул вакытта $\angle A_1C_1H = 90° - 90° + \alpha = \alpha$. Моннан $\angle A_1C_1H = \angle HC_1B_1$, ягъни C_1C — $\angle A_1C_1B_1$ биссектрисасы. Аналогия буенча A_1A — $\angle C_1A_1B_1$ нең биссектрисасы, BB_1 $\angle C_1B_1A_1$ нең биссектрисасы булуын исбатларга мөмкин. **2.** cR/b.

М—32

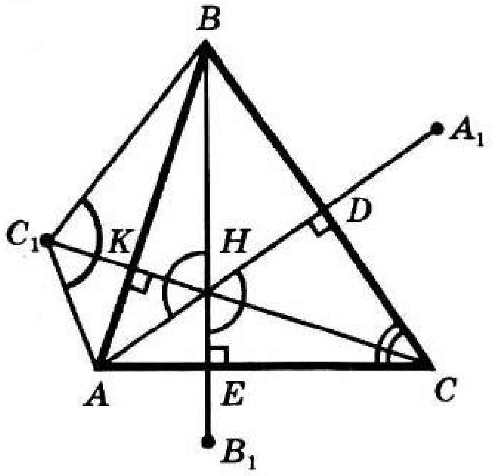
1 *вар.* **1.** $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$, $\vec{f}$ һәм $\vec{e}$. **2.** $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$, $\vec{f}$ һәм $\vec{e}$. **3.** $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$. **4.** $\vec{f}$ һәм $\vec{e}$; ярамый.

2 *вар.* **1.** $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$, $\vec{c}$ һәм $\vec{e}$, $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$. **2.** $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$. **3.** $\vec{c}$ һәм $\vec{e}$, $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$. **4.** $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$; әйе, мөмкин.

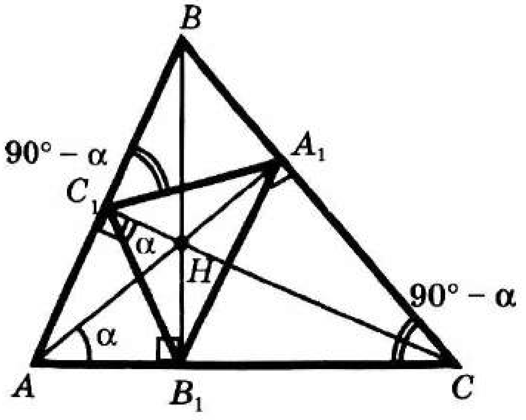
3 *вар.* **2.** а) $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{d}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$; б) $\vec{c}$ һәм $\vec{a}$; в) $\vec{d}$ һәм $\vec{a}$; $\vec{d}$ һәм $\vec{c}$; г) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$.

4 *вар.* **2.** а) $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$, $\vec{m}$ һәм $\vec{c}$, $\vec{n}$ һәм $\vec{c}$; б) $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$; в) $\vec{m}$ һәм $\vec{c}$; $\vec{n}$ һәм $\vec{c}$; г) $\vec{d}$ һәм $\vec{c}$.

5 *вар.* **1.** а) $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$ һәм $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{DF}$; б) $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AF}$ һәм $\overrightarrow{DF}$; г) $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{AF}$; д) $\overrightarrow{EC}$ һәм $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ һәм $\overrightarrow{DF}$. **2.** 90°.



Рәс. 56



Рәс. 57

6 *вар.* **1.** а) $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CF}$, $\overline{DC}$ һәм $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ һәм $\overline{CE}$, $\overline{BE}$ һәм $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ һәм $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CF}$, $\overline{DC}$ һәм $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ һәм $\overline{AD}$; в) $\overline{CE}$ һәм $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ һәм $\overline{BE}$; г) $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CF}$, $\overline{CF}$ һәм $\overline{DC}$; д) $\overline{BE}$ һәм $\overline{CE}$. **2.** 20 см.

7 *вар.* **1.** 21. $\vec{0}$ икәнен исәпкә алырга кирәк.

8 *вар.* **1.** 21. $\vec{0}$ икәнен исәпкә алырга кирәк.

М—33

1 *вар.* **2.** $\vec{0}$. 5 *вар.* **2.** $\overline{ED}$. 6 *вар.* **2.** $\overline{EF}$.

8 *вар.* $\overline{CB_1} = \overline{CA_1} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{C_1B} = \overline{C_1A_1} + \overline{A_1B}$, $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1A_1}$, $\overline{CA_1} = \overline{A_1B}$. Моннан $\overline{CB_1} = \overline{C_1B}$ икәне килеп чыга.

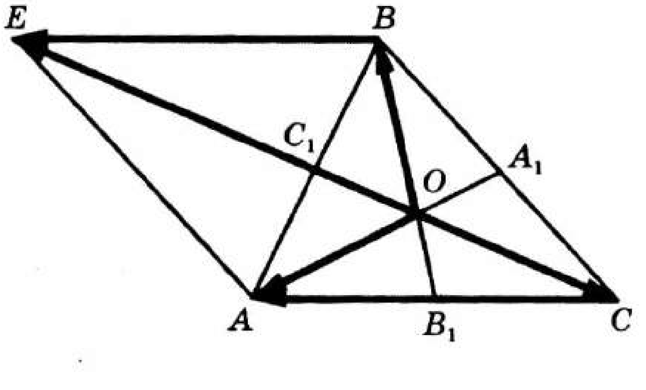
М—34

1 *вар.* **2.** $\overline{AB} - \overline{AC}$. **3.** 6 см.
2 *вар.* **2.** $\overline{CA} - \overline{CB}$. **3.** 5.
3 *вар.* **2.** $-\vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{c}$. **3.** 6,5.
4 *вар.* **2.** $\vec{a} - \vec{d}$, $\vec{d} - \vec{a}$, $\vec{a}$. **3.** 16.
5 *вар.* **1.** $\overline{AC} - \overline{DC} - \overline{BD}$. **2.** $\overline{OD} + \overline{OB} - \overline{OC}$. **3.** $a\sqrt{2}/2$.
6 *вар.* **1.** $-\overline{DA} + \overline{DC} + \overline{CB}$. **3.** $a\sqrt{3}/2$.

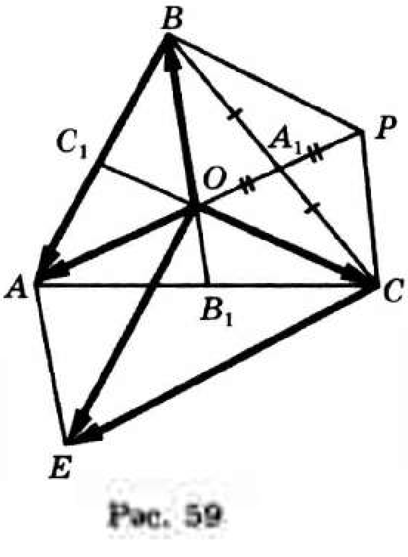
7 *вар.* **1.** $\frac{4m}{3}$; $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{CA}$. Төзү 58 нче рәсемдә күрсәтелгән.

8 *вар.* **1.** $\frac{4m}{3}$; $\overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} = \overline{BA} - \overline{OC}$. O ноктасыннан $\overline{OE} = \overline{BA}$ векторын салабыз (рәс. 59). Ул чакта $\overline{OE} - \overline{OC} = \overline{CE}$. AA_1 не, рәсемдә күрсәтелгәнчә, OA_1 гә тигез булган A_1P кисемтәсенә озынайтабыз. Ул чакта $OBPC$ — параллелограмм һәм $PC \parallel OB \parallel AE$, $PC = OB = AE$. Моннан $EAPC$ — параллелограмм һәм $|\overline{CE}| = 4m/3$.

2. $\overline{A_1B_1} = \overline{OB_1} - \overline{OA_1} = -\overline{OB} - (-\overline{OA}) = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$. Моннан $A_1B_1 = BA$ һәм $A_1B_1 \parallel BA$. Алга таба ап-ачык.



Рәс. 58



Рәс. 59

М—35

1 *вар.* **2.** $\overline{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overline{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

2 *вар.* **2.** $\overline{DP} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}$, $\overline{DM} = \vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

3 *вар.* **2.** $\vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}$, $\frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}$.

4 *вар.* **2.** $\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{a}$, $\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{p}$.

5 *вар.* **2.** $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{p}$.

6 *вар.* **2.** $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{p}$.

7 *вар.* **1.** 0; $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{BA_1} - \overline{BA} + \overline{CB_1} - \overline{CB} + \overline{AC_1} - \overline{AC_1} =$
$= k\overline{BC} + \overline{AB} + k\overline{CA} + \overline{BC} + k\overline{AB} + \overline{CA} = k\cdot(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) = 0$.

2. $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{CD} = \vec{c}$ булсын ди (рәс. 60). $\overline{FE} = \overline{OD} = \vec{a} + \vec{c}$,
$\overline{AF} = k\overline{CD} = k\vec{c}$, $\overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AF} + \overline{FE} = -\vec{a} + k\vec{c} + (\vec{a} + \vec{c}) =$
$= (k+1)\vec{c}$. Бу $BE \parallel AF$ дигәнне аңлата.

8 *вар.* **1.** $\overline{PE} = \overline{BE} - \overline{BP} = k\overline{BC} - (k-1)\overline{AB}$. Аналогия буенча $\overline{MF} = k\overline{AD} - (k-1)\overline{DC}$ икәнен табарга була. $\overline{BC} = \overline{AD}$ һәм $\overline{AB} = \overline{DC}$ булганга, $\overline{PE} = \overline{MF}$, ә шуңа күрә $PEFM$ — параллелограмм.

2. AB һәм CD хордалары M ноктасында кисешсен ди (рәс. 61); $OK \perp AB$, $OE \perp CD$, $\overline{OM} = \overline{OK} + \overline{OE}$, $\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK} = \overline{OA} + 0{,}5\overline{AB} = \overline{OA} +$
$+ 0{,}5(\overline{OB} - \overline{OA}) = 0{,}5\overline{OA} + 0{,}5\overline{OB}$. Аналогия буенча $\overline{OE} = 0{,}5\overline{OC} +$
$+ 0{,}5\overline{OD}$, $\overline{OM} = \overline{OK} + \overline{OE} = 0{,}5(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$.

М—36

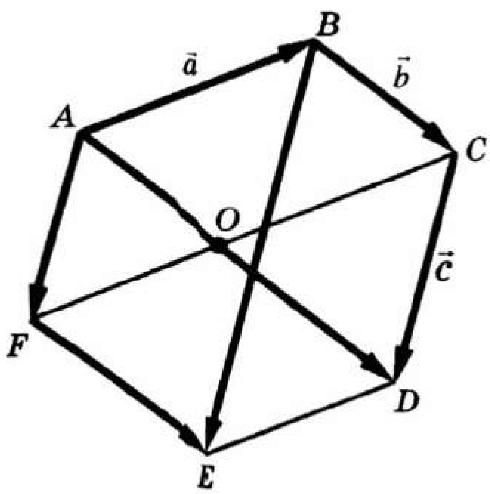
1 *вар.* **1.** $\overline{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. **2.** $\frac{1}{3}$.

2 *вар.* **1.** $\overline{AK} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{p}$. **2.** 15°, 165°, 165°.

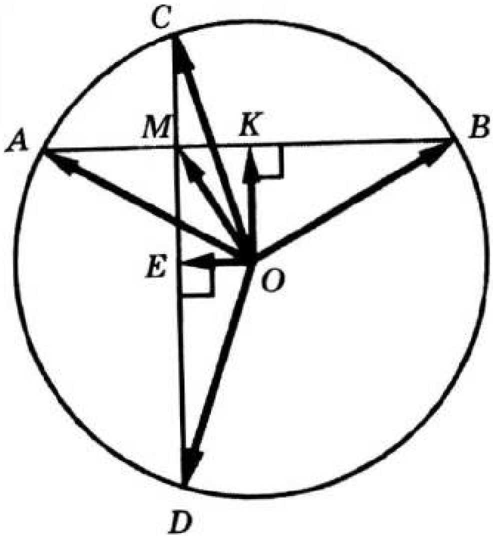
3 *вар.* **2.** $\frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{CD}$.

5 *вар.* **2.** $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ икәнен исбатлагыз.

7 *вар.* **1.** $\overline{OK} = \frac{2}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$ һәм $\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{OD} + \frac{1}{3}\overline{OA}$ икәнен табу җиңел. $\overline{OD} = -\overline{OB}$, $\overline{OA} = -\overline{OC}$ икәнен табабыз. Моннан $\overline{OK} = -\overline{OE}$. Бу



Рәс. 60



Рәс. 61

K, O, E нокталары бер туры өстендә яталар һәм O — KE кисемтәсенең уртасы дигәнне аңлата.

2. AA_1 һәм BB_1 медианалары M ноктасында кисешсен һәм $\frac{BM}{MB_1} = \frac{m}{n}$; $\overline{AM} = \frac{m}{m+n}\overline{AB_1} + \frac{n}{m+n}\overline{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overline{AC} + \frac{n}{m+n}\overline{AB}$ (1), $\overline{AM} = k\overline{AA_1} = \frac{k}{2}\overline{AC} + \frac{k}{2}\overline{AB}$ (2) булсын ди.

(1) һәм (2) аңлатмаларыннан $\frac{m}{2(m+n)} = \frac{k}{2}$ һәм $\frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}$ икәне килеп чыга. Моннан $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$, ягъни $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$ була. Әгәр BB_1 һәм CC_1 медианалары M_1 ноктасында кисешә дип уйласак, аналогия буенча $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$ икәнен исбатларга мөмкин, димәк, M һәм M_1 нокталары тәңгәл килә. Бирелгән торыш шуның белән исбатлана.

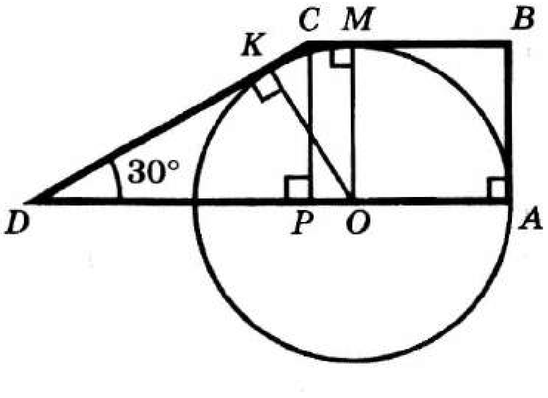
8 *вар.* **1.** $\overline{CC_1} = \overline{CB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{DA} + \overline{BB_1} + \overline{AD_1} = \overline{DA} + \overline{AD_1} + \overline{BB_1} = \overline{DD_1} + \overline{BB_1}$. Моннан $|\overline{CC_1}| \le |\overline{DD_1}| + |\overline{BB_1}|$, ягъни $CC_1 \le BB_1 + DD_1$.

2. $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = 2\overline{OA_1} - 2\overline{OB_1} = 2$ (*), $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA_1} = x\overline{CA_1} - y\overline{CB_1}$; $\overline{BA_1} = \overline{CA_1} - \overline{CB_1}$. (*) тигезлегеннән $x\overline{CA_1} - y\overline{CB_1} = 2\overline{CA_1} - 2\overline{CB_1}$; $(x-2)\overline{CA_1} = (y-2)\overline{CB_1}$ икәне килеп чыга. Моннан $x = 2$ һәм $y = 2$. Бу A_1 һәм B_1 — BC һәм AC якларының урталары, ягъни AA_1 һәм BB_1 — медианалар дигәнне аңлата.

М—37

1 *вар.* **1.** 12 см һәм 8 см. **2.** 14 см, 6 см, 10 см.
2 *вар.* **1.** 10 см һәм 20 см. **2.** 22 см, 16 см.
3 *вар.* **1.** 3 см. **2.** 5 см, 10 см.
4 *вар.* **1.** 5 см. **2.** 13 см, 9 см.
5 *вар.* **1.** 2 см.
6 *вар.* **1.** 8 см.
7 *вар.* **1.** 50 см. KLның BC һәм AD турыларына параллель булуын һәм аларның икесеннән дә тигез ераклыкта ятканын исбатларга кирәк. KL AB ны P, ә CD ны T ноктасында кисеп үтсен ди. Ул чакта PT — трапециянең урта сызыгы. BKA һәм CLD өчпочмаклары турыпочмаклы һәм $AB = 2 \cdot KP$, $CD = 2 \cdot LT$. Моннан трапециянең периметры 50 см. **2.** 4 см һәм 16 см.
8 *вар.* **1.** 18 см һәм 6 см.

2. 2. Турыпочмаклы DKO өчпочмагыннан (рәс. 62) $DK = R\sqrt{3}$ һәм $DO = 2R$, монда R — әйләнә радиусы. CPD өчпочмагыннан $DC = 2R$, $KC = 2R - R\sqrt{3}$ була. $CM = CK = 2R - R\sqrt{3}$, $AD = 3R$, $BC = R + 2R - R\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$ икәнен исәпкә алырга кирәк. Трапециянең урта сызыгы $6 - \sqrt{3}$ кә тигез булганга, $\frac{3R + 3R - R\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}$. Моннан $R = 2$.



Рәс. 62

М—38

1 *вар.* б) 4 см², 12 см.

2 *вар.* б) 6,1 см, 5,1 см, 4,3 см, 13,9 см².

3 *вар.* б) 20 см, 20 см².

4 *вар.* б) 94,4 см².

5 *вар.* а) $MB = KD = 2$ см һәм $MB \parallel KD$ икәне җиңел исбатлана. Димәк, $MBKD$ — параллелограмм. Ромбның AB ягына DE биеклеген үткәрик. Ул чакта DBE өчпочмагыннан $DE^2 = (2\sqrt{5})^2 - BE^2$, ә DAE өчпочмагыннан $DE^2 = 5^2 - (5 - BE)^2$. Әгәр E ноктасы AB кисемтәсенә эләкмәсә, $DE^2 = 5^2 - (BE - 5)^2 = 25 - (5 - BE)^2$, ягъни $20 - BE^2 = 25 - (5 - BE)^2$, моннан $BE = 2$ см. Димәк, E һәм M нокталары тәңгәл киләләр, Моннан $\angle BMD = 90°$, ягъни $MBKD$ — турыпочмаклык. б) $DM = DE = 4$. Димәк, турыпочмаклыкның периметры 12 см, ә мәйданы 8 см².

6 *вар.* **1.** 48°35′. **2.** 12 см.

7 *вар.* **1.** 12,9 см². ABC һәм ADC өчпочмакларының охшаш булуын исбатларга мөмкин, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, ягъни $AC^2 = BC \cdot AD$, моннан $AC = 4$. Трапециянең CE биеклеге турыпочмаклы BAE өчпочмагыннан табыла.

2. ABC почмагы x ка тигез булсын ди, ул чакта $\angle MCH = 180° - x$, $\angle MAH = x$; $AMCH$ дүртпочмагының почмаклары суммасы 360° булганга, $\angle MAH = \angle ABC$. Параллелограммның ике биеклеге үзләре төшерелгән якларга кире пропорциональ икәне дә билгеле. Ул вакытта $\frac{AM}{CD} = \frac{AH}{BC}$ яки $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{BC}$. Моннан MAH һәм ABC өчпочмаклары ике ягы һәм алар арасындагы почмак буенча охшаш. Аларның охшашлык коэффициенты $MH : AC = 3 : 4$. Ул чакта эзләнелә торган чагыштырма 9 :16 га тигез.

8 *вар.* **1.** 12,9 см². **2.** 4 : 9. Мәсьәлә **М—38** 7 нче вариант мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

М—39

1 *вар.* **1.** 60°. **2.** 6 см.

2 *вар.* **1.** 90°. **2.** 3 дм, 4 дм.

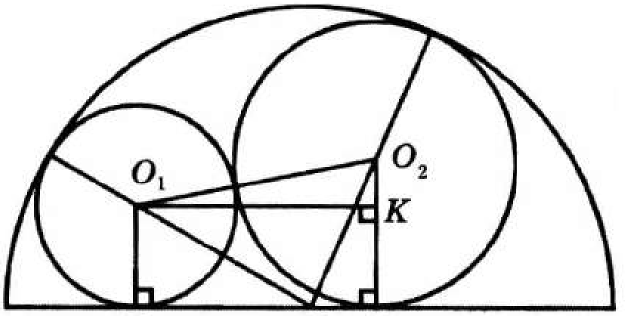
3 *вар.* **1.** 90°. **2.** $3\sqrt{3}$ см².

4 *вар.* **1.** 45°. **2.** 54 см².

5 *вар.* **1.** 60°. **2.** Трапеция эчендә. $ABCD$ — бирелгән трапеция, анда $AD = 24$ см, $BC = 10$ см, BE биеклеге 17 см булсын ди. Трапецияне камаган әйләнә ABD өчпочмагын да камый. $AE = 7$ см, $ED = 17$ см икәнен исбатларга мөмкин. Ул чакта DBE почмагы 45° була. EA нурында E ноктасыннан 17 см га тигез булган EK кисемтәсен салыйк. Ул чакта $\angle KBE = 45°$, ә $\angle ABE < 45°$. Моннан $\angle ABD < 90°$. Шулай итеп, ABD өчпочмагының кысынкыпочмаклы булуы ап-ачык. Димәк, аны камаган әйләнә үзәге бу өчпочмак эчендә ята.

6 *вар.* **1.** 60°.

2. Юк, була алмыйлар. $BD = x$ булсын, ул чакта турыпочмаклы ABD һәм BCD өчпочмакларыннан $AB = 0{,}5x$, $AD = 0{,}5\sqrt{3}\,x$, $BC = x$, $CD = x\sqrt{2}$ икәнен табабыз. Әгәр $ABCD$ дүртпочмагының барлык почмакларының да биссектрисалары бер ноктада кисешә дип уйласак, дүртпочмакның барлык



Рәс. 63

якларыннан да бертигез ераклыкта ятучы нокта бар, ягъни бу дүртпочмакка әйләнә камарга була. Димәк, $AB + CD = BC + AD$ шарты үтәлергә тиеш. Ләкин $0{,}5x + x\sqrt{2} \neq x + 0{,}5\sqrt{3}\,x$. Димәк, без дөрес уйламаганбыз һәм биссектрисалар бер ноктада кисешмиләр.

7 *вар.* Үзәге O_1 ноктасында булган әйләнә радиусын 1 дип, ә O_2 ноктасындагыныкын x дип алыйк (рәс. 63). Ул чакта ярымәйләнә радиусы 3, $OO_1 = 2$, $OO_2 = 3 - x$ була. ΔO_1EO дан $OE = \sqrt{3}$, ә ΔO_2FO дан $OF = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$; $EF = OE + OF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$. $\Delta O_1KO_2 (O_1K \perp O_2F)$ ны тикшерик; $O_2O_1 = 1 + x$, $O_2K = x - 1$, $O_1K = EF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$.

Ул чакта, Пифагор теоремасын кулланып, $(\sqrt{3} + \sqrt{9-6x})^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2$ табабыз. Моннан $3\sqrt{3-2x} = 5x - 6$ һәм $25x^2 - 42x + 9 = 0$. $x > \frac{6}{5}$ икәнен истә тотып, $x = \frac{21 + 6\sqrt{6}}{25}$ ны табабыз.

8 *вар.* Нинди дә булса MPN өчпочмагына әйләнә камалган һәм $PN=m$ булсын ди. Ул чакта түбәдән әйләнә белән MP һәм MN яклары орынган ноктага кадәр ераклык $p - m$ га тигез, монда p — ΔMPN ның ярымпериметры. Моны безнең очракка кулланып табабыз: $BE = \frac{AB+BD+a}{2} - a$, $BF = \frac{BC+BD+b}{2} - b$, $EF = |BE - BF| = \left|\frac{AB+BD-a}{2} - \frac{BC+BD-b}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}$.

Контроль эшләр

К—1

1 *вар.* **1.** 120°, 60°. **3.** а) Турыпочмаклык. **4.** Билгеләнгән почмаклар суммасы $ACEKT$ бишпочмагы почмаклары суммасына тигез, ягъни 540°.

2 *вар.* **3.** а) Ромб; б) 40°. **4.** Кабарынкы алтыпочмакның почмаклары суммасы 720° ка тигез. 4 кысынкы почмак суммасы 360° тан ким. Димәк, калган ике почмакның суммасы 360° тан зур, ә бу мөмкин түгел.

3 *вар.* **3.** б) Бишпочмак. **4.** Билгеләнгән почмаклар суммасы $ACEHNO$ алтыпочмагы почмаклары суммасына тигез.

4 *вар.* **4.** n-почмаклык, почмакларның берсе 1° ка тигез булган дүртпочмак булырга мөмкин. $n = 4$ икәнен исбатлыйк. n 3 кә тигез була алмый, чөнки өчпочмакның почмаклары суммасы 180° кына. $n \geq 5$ булганда n-почмаклыкның почмаклары суммасы 720° тан кечкенә булмый. Ул чакта n-нчы почмак 361° тан зур була, ә болай була алмый. Димәк, $n = 4$.

К—2

1 *вар.* **1.** 108 см². **2.** 75 см². **3.** а) $3\sqrt{3}$ см²; б) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ см²

4. *ABDE* һәм *ACDE* дүртпочмакларының мәйданнары тигез булса, *ABD* һәм *ACD* өчпочмакларының мәйданнары да тигез була. Димәк, *B* һәм *C* нокталары *AD* турысыннан тигез ераклыкта яталар, моннан *BC* ∥ *AD* булуы килеп чыга.

2 *вар.* **1.** 56 см². **2.** 102 см². **3.** а) $16\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{3}$ см².

4. Мәсьәлә 1 нче вариантның 4 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

3 *вар.* **1.** 32 см². **2.** 75 см². **3.** а) $\frac{120}{13}$ см; б) 15 см².

4. Мәсьәлә 1 нче вариантның 4 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

4 вар. **1.** 150 см². **2.** $\frac{225}{2}$ см². **3.** а) $\frac{246}{5}$ см²; б) 3 см².

К—3

1 *вар.* **1.** б) 9 : 1. **2.** б) 3 : 1 **3.** $\frac{AO}{OE}=\frac{DK}{CK}$ икәнен исбатларга була, ләкин $\frac{AB}{BE}=\frac{AO}{OE}$, чөнки *BO* нуры *ABE* почмагының биссектрисасы. Димәк, $\frac{AB}{BE}=\frac{3}{2}$.

2 *вар.* **1.** а) 15 см; б) 1 : 9. **2.** 13 : 4. **3.** $\frac{3}{4}$. Мәсьәлә 1 нче вариантның 3 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

3 *вар.* **1.** б) 4 : 1. **2.** б) $\frac{4}{5}$. **3.** *MBK* һәм *ABC* өчпочмаклары ике почмаклары буенча охшаш. Димәк, $\frac{BC}{AB}=\frac{MB}{BK}$, ләкин $\frac{MB}{BK}=\frac{MO}{OK}=\frac{2}{3}$, чөнки *BO* — *MBK* өчпочмагының биссектрисасы.

4 *вар.* **1.** а) 1 : 2; б) 1 : 9. **2.** б) 1 : 5. **3.** Мәсьәлә 3 нче вариантның 3 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

К—4

1 *вар.* **1.** $\frac{2}{3}$, 15 мм. **3.** а) 45°; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4*.** Тышкы турыпочмаклык *a* һәм *b* ($a > b$) үлчәмнәренә ия булсын ди, ә рамканың киңлеге *c* га тигез. Ул вакытта тышкы һәм эчке өчпочмаклар охшаш булсын өчен, шартларның берсе үтәлергә тиеш: $\frac{b-2c}{b}=\frac{b-2c}{a}$ яки $\frac{b-2c}{a}=\frac{a-2c}{b}$. Бу тигезлекләрнең үтәлүе мөмкин булмавын исбатлап була.

2 *вар.* **1.** 20 дм, $\frac{4}{5}$. **3.** а) 3 см; б) $3\sqrt{3}$ см. **4*.** Бирелгән турыпочмаклык *a* һәм *b* үлчәмнәренә ия булсын ди. Ул чакта барлыкка килгән турыпочмаклык һәм бирелгәненең охшашлыгы өчен түбәндәге шартларның берсе үтәлергә тиеш: $\frac{a}{2b}=\frac{a}{b}$ яки $\frac{a}{2b}=\frac{b}{a}$. Соңгы шарт $a=\frac{b}{a}$ булганда үтәлә, бу барлыкка килгән һәм бирелгән турыпочмаклыклар охшаш булырга мөмкинлеге турында сөйли.

3 *вар.* **1.** 2 дм, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 45°; б) $4\sqrt{2}$. **4*.** *a* яклы квадрат яклары *a*, *b* һәм *a*—*b*, *a* булган ике турыпочмаклыкка киселгән булсын ди. Бу турыпочмаклыклар охшаш булсын өчен түбәндәге шартларның берсе үтәлергә тиеш: $\frac{a}{b}=\frac{a}{a-b}$ яки $\frac{a}{b}=\frac{a-b}{a}$. Бу тигезлекләрнең мөмкин булмавын исбатлап була.

4 *вар.* **1.** 15 см, $\frac{3}{5}$. **3.** а) 12 см; б) $\frac{28}{\sqrt{3}}$ см. **4*.** *a* һәм *b* яклы турыпочмаклык *b*, *c* һәм *a* — *c*, *b* яклы турыпочмаклыкларга киселгән. Барлыкка килгән өчпочмаклар охшаш булсын өчен түбәндәге шартларның берсе үтәлергә тиеш: $\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ яки $\frac{b}{c}=\frac{a-c}{b}$. Соңгы шарт, мәсәлән, $a=2{,}5$, $b=1$, $c=2$ булганда үтәлергә мөмкин. Бу барлыкка килгән өчпочмакларның охшаш булырга мөмкинлеге турында сөйли.

К—5

1 *вар.* 1. 1 см. 2. 30°, 12 см. 3. а) 5 см; б) 4,1 см. 4. *O* ноктасы аша *AO* һәм *BO* нурларын үткәрик. Алар әйләнәне тиңдәшле рәвештә *M* һәм *H* нокталарында кисеп үтәләр. *AH* һәм *BM* турылары *O* ноктасында кисешсеннәр ди. $\angle AHB = \angle AMB = 90°$ икәнен исбатларга мөмкин. Ул чакта эзләнелә торган перпендикуляр *CO* турысында ята.

2 *вар.* 1. 2 см. 2. 2 см, 90°, 45°. 3. а) $4\sqrt{3}$ см; б) 15° яки 75°. 4. $BD = ET$ диаметрлы әйләнә һәм үзәге *B* ноктасында һәм радиусы *PO* кисемтәсенә тигез булган әйләнә төзибез. Икенче әйләнә беренчесен *A* һәм *C* нокталарында кисеп үтсен ди. *ABCD* эзләнелә торган дүртпочмак була.

3 *вар.* 1. $\sqrt{3}$ см. 2. 4 см, 135°. 3. а) $22\sqrt{2}$ см; б) $72\sqrt{2}$. 4. Мәсьәлә 1 нче вариантның 4 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

4 *вар.* 1. $4\sqrt{2}$ см, 4 см, 4 см. 2. 4 см, 15°. 3. а) 4 см; б) 30°, 150°. 4. Мәсьәлә 2 нче вариантның 4 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

К—6

1 *вар.* 2. а) $\overline{MB_1} = \frac{1}{2}\overline{MA} + \frac{1}{2}\overline{MC}$; б) $\overline{CM} = \frac{1}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$; в) $\overline{MA_1} = -\frac{1}{3}\overline{AB} + 0 \cdot \overline{AC}$; г) *T* ноктасы BB_1 кисемтәсенең уртасы булсын ди. Ул чакта $\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$. Икенче яктан, $\overline{AA_1} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$. Моннан чыгып, $\overline{AA_1} = \frac{4}{3}\overline{AT}$. Димәк, A, T, A_1 бер турыда ята.

2 *вар.* 2. а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AO}$; в) $\overline{AO} = 1{,}5\,\overline{DM} - 1{,}5\,\overline{DE}$; г) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\left(\overline{DA} + \frac{1}{3}\overline{DA}\right) = \frac{2}{3}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC}$. Димәк, $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$, чөнки $\overline{DA}$ һәм $\overline{DC}$ векторлары коллинеар түгел.

3 *вар.* 2. а) $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$; в) $\overline{OD} = \frac{4}{3}\overline{AP} - \frac{4}{3}\overline{AM}$; г) $\overline{OP} = \overline{AP} - \overline{AO} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AD} - \frac{1}{6}\overline{AB}$. Димәк, $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AD$, чөнки $\overline{AD}$ һәм $\overline{AB}$ векторлары коллинеар түгел.

4 *вар.* 2. а) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{OD}$; б) $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AB}$; в) $\overline{CO} = -\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AD}$; г)* $\overline{OM} = \frac{1}{5}\overline{OA} + \frac{4}{5}\overline{OE}$. Икенче яктан, $\overline{OD} = \overline{OA} + 4\overline{OE}$. Моннан $OD = 5OM$ була. Димәк, *O*, *D*, *M* нокталары бер туры өстендә яталар.

К—7

1 *вар.* 1. а) $14\sqrt{3}$; б) 120°, 60°; в) 7; г) юк; д) юк; е) әйе; ж) $\overline{CA} = \overline{CD} + \frac{4}{3}\overline{CB}$. 2. Бирелгән кисемтәне берәмлек итеп алыгыз да 1 һәм 2 катетлы турыпочмаклы өчпочмак төзегез.

2 *вар.* 1. а) $4\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 4 : 1; г) $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{HB}$; д) мөмкин; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$; ж) $\frac{2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$. 2. *PO* кисемтәсе бирелсен ди. Ниндидер бер турыда бер-бер артлы $AB = 3PO$ һәм $BC = 4PO$ кисемтәләрен салабыз. *AC* диаметрлы ярымәйләнә төзибез. *B* ноктасы аша ярымәйләнәне *D* ноктасында кисүче *AC* га перпендикуляр туры үткәрик. *BD* эзләнелә торган кисемтә була.

3 *вар.* **1.** а) 30°, 120°, 60°; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $2\sqrt{3}$; в) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$; г) 90°, 60°, 90°, 120°; ж) $\overline{OM} = \frac{3}{4}\overline{OD} + \frac{1}{4}\overline{OC}$.

2. Мәсьәлә 2 нче вариантның 2 нче мәсьәләсенә аналогия буенча чишелә.

4 *вар.* **1.** а) 1 : 9; б) 4; в) 3,5; г) юк; д) $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{TB} - \overline{CA}$; е) $\frac{\sqrt{26}}{26}$; ж) 90°, 135°, 135°. **2.** Бирелгән кисемтәгә тигез булган катеты һәм аның янындагы 30° лы почмак буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез. Ул вакытта икенче катет эзләнелә торган кисемтә була.

Аеруча катлаулы мәсьәләләр

1. ABC өчпочмагы җәенке почмаклы ($\angle C$ — җәенке) һәм CM аның медианасы булсын ди. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ һәм $CM = m$ дип билгелик. CM ны M ноктасына таба дәвам итеп, CM га тигез булган MD кисемтәсен салыйк. Ул чакта $ADBC$ — параллелограмм һәм $AD = a$. $2m < a + b$ (1) икәне ап-ачык.

Моннан тыш, шарт буенча $DC < AB$, ягъни $m < \frac{c}{2}$ һәм $2m < c$ (2).

(1) һәм (2) тигезлекләреннән $4m < a + b + c$ һәм $m < \frac{P}{4}$ була.

2. C түбәсе аша AB га параллель һәм AD ны K ноктасында кисүче туры үткәрик. Шарт буенча $BC + CD = AK + KD$; $AK = BC$. Ул чакта $KD = CD$. Бу очракта $\angle KCD = \angle CKD$. Моннан тыш, $\angle BAD = \angle CKD$. $AC = CD$ булганга, $\angle D = \angle CAK$. $AB = BC$ булганга, $ABCD$ — ромб һәм $\angle CAK = \frac{1}{2}\angle BAD$ дип әйтергә була. $\angle BAD$ ны x аша тамгалыйк. Ул чакта $\angle D = \angle CAK = \frac{x}{2}$ һәм $\angle KCD = \angle CKD = x$. KCD өчпочмагыннан $x + x + \frac{x}{2} = 180°$ һәм $x = 72$ була. Бу очракта $\angle BAD = 72°$. Калган почмакларын табу бик гади.

Җавап. 72°, 108°, 144°, 36°.

3. E ноктасы аша AD га параллель һәм икенче кисүчене K ноктасында кисеп үтүче туры үткәрик. $KE \parallel AD$ булганга, $\angle ABC = \angle CKE$. $AB = AC$ булудан чыгып, $\angle ABC = \angle ACB$. Ул очракта $\angle CKE = \angle KCE$ һәм $KE = CE$. MBD һәм MKE өчпочмаклары охшаш $\frac{BD}{KE} = \frac{MD}{ME}$, моннан исбатланган буенча $KE = CE$. Ул вакытта $\frac{BD}{CE} = \frac{MD}{ME}$.

4. AOD һәм ACD өчпочмакларын карыйк (O — диагональләр кисешү ноктасы): $\angle ACD = \angle BDA$, $\angle CAD$ — уртак. Моннан $\Delta AOD \sim \Delta ACD$ һәм $\frac{AO}{AD} = \frac{AD}{AC}$ (1) икәне килеп чыга. Аналогия буенча $\Delta CBO \sim \Delta ABC$ һәм $\frac{CO}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (2). (1) һәм (2) тигезлекләреннән $AD^2 = AO \cdot AC$ һәм $BC^2 = CO \cdot AC$ икәне чыга. Ул чакта $AD^2 + BC^2 = AC(AO + AC) = AC^2$, нәкъ менә шуны исбатларга кирәк иде.

5. D ноктасы аша BF ка параллель һәм AC ны K ноктасында кисеп үтүче туры үткәрик. $AF = FK = KC$ икәне җиңел исбатлана. Ул чакта $S_{DKC} = \frac{1}{3}S_{ADC} = \frac{1}{6}S$, $S_{AKD} = \frac{S}{2} - \frac{S}{6} = \frac{S}{3}$, $S_{AMF} = \frac{1}{4}S_{AKD} = \frac{S}{12}$. Җавап. $\frac{S}{12}$.

6. AC EM урта сызыгын F ноктасында кисеп үтсен һәм $\frac{EF}{FM} = k$ булсын ди. $S_{AEF} = S_1$; $S_{EBCF} = S_2$; $S_{FCM} = S_3$; $S_{AFMD} = S_1$ дип тамгалыйк.

$S_2 + S_3 = S$ икәне ап-ачык; $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (охшашлык коэффициенты $\frac{1}{2}$).
Ул чакта $\frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{4}{1}$ һәм $S_2 = 3S_1$. Аналогия буенча $S_4 = 3S_3$. AEF һәм FCM өчпочмакларының биеклекләре тигез һәм $\frac{S_1}{S_3} = \frac{EF}{FM} = k$.

Ул вакытта $S_1 = kS_3$; $S = S_2 + S_3 = 3S_1 + S_3 = 3kS_3 + S_3 = (3k+1)\cdot S_3$; $S_3 = \frac{S}{3k+1}$; $S_{түм} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + 3S_1 + S_3 + 3S_3 = 4S_1 + 4S_3 = 4(S_1 + S_3) =$

$$= 4(kS_3 + S_3) = 4(k+1)\cdot S_3 = \frac{4(k+1)}{3k+1}\cdot S.$$ Җавап. $\frac{4(k+1)}{3k+1}\cdot S$.

7. AB ның уртасы M һәм CB ның уртасы N булсын ди. $AN = k\sqrt{17}$ һәм $CM = k\sqrt{5}$ $(k > 0)$ дип уйлыйк. Ул чакта $AB = 2k\sqrt{5}$; $AC = x$; $CN = \sqrt{AN^2 - AC^2} = 17k^2 - x^2$; $BC = 2\cdot\sqrt{17k^2 - x^2}$; $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Моннан $4{,}5k^2 = x^2 + 4(17k^2 - x^2)$; $x = 4k$. Ул чакта $AC = 4k$ һәм $BC = 2k$ һәм $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$.

Җавап. 1 : 2

8. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында биеклек $CD = h = \frac{ab}{c}$, ә катетларның гипотенузага проекциясе $m = \frac{b^2}{c}$ һәм $n = \frac{a^2}{c}$.

$$P_{ADC} = m + b + \frac{ab}{c},\ P_{DBC} = n + a + \frac{ab}{c}.$$

$$\frac{m}{P_{ADC}} + \frac{n}{P_{DBC}} + \frac{c}{P_{ABC}} = \frac{b^2}{c\left(m + b + \frac{ab}{c}\right)} + \frac{a^2}{c\left(n + a + \frac{ab}{c}\right)} + \frac{c}{a+b+c} =$$

$$= \frac{b^2}{c(\frac{b^2}{c} + b + \frac{ab}{c})} + \frac{a^2}{c(\frac{a^2}{c} + a + \frac{ab}{c})} + \frac{c}{a+b+c} =$$

$$= \frac{b^2}{b^2+bc+ab} + \frac{a^2}{ac+a^2+ab} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{b}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1,$$ шуны исбатларга кирәк иде.

9. Камалган әйләнә диаметры $d = a + b - c$, монда a һәм b — өчпочмакның катетлары.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \le a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2c^2$. $\left(\frac{a^2+b^2}{a+c} \ge ab\right)$.

Моннан $a + b \le c\sqrt{2}$.

Ул вакытта $d = a + b - c \le c\sqrt{2} - c = c(\sqrt{2} - 1)$.

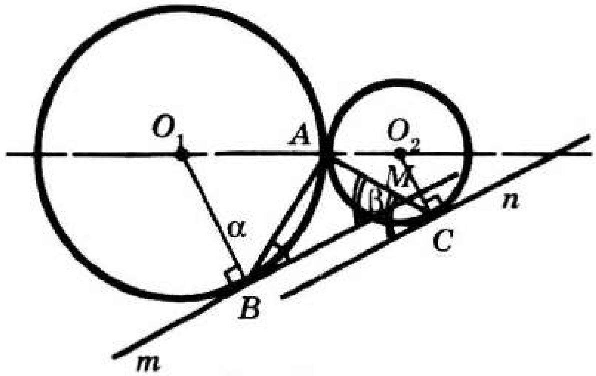
Шуны исбатларга кирәк иде.

10. Өчпочмакның катетлары a һәм b, гипотенузасы c булсын ди. ACK өчпочмагында CE — биссектриса, ә шуңа күрә $\frac{AE}{EK} = \frac{AC}{CK}$ (1).

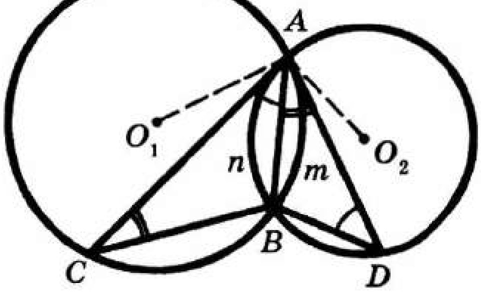
AC катетының гипотенузага проекциясе $AK = \frac{b^2}{c}$. Ул чакта $EK = \frac{b^2}{c} - AE$; $h = CK = \frac{ab}{c}$. (1) дән $\frac{AE}{\frac{b^2}{c} - AE} = \frac{b}{\frac{ab}{c}}$ була. Моннан $AE = \frac{b^2}{a+c}$;

$BE = AB - AE = c - \frac{b^2}{a+c} = \frac{ac+c^2-b^2}{a+c} = \frac{ac+a^2}{a+c} = a$, ягъни $BE = CB$, шуны исбатларга кирәк иде.

11. AP ны CB белән K ноктасында кисешкәнче дәвам итик. B һәм C нокталарыннан AP турысына BE һәм CF перпендикулярын төшерик. ABP һәм ACP өчпочмаклары бертигез зурлыкта һәм AP — уртак нигез. Ул очракта аларның BE һәм CF биеклекләре тигез. Турыпочмаклы BEK һәм



Рәс. 64



Рәс. 65

CFK өчпочмаклары катет һәм кысынкы почмак буенча тигез ($\angle BKE = \angle CKF$). Моннан $BK = KC$, ягъни AK — медиана була. Аналогия буенча P ноктасының BM медианасында ятуын исбатларга мөмкин. Димәк, P — өчпочмакның медианалары кисешү ноктасы.

12. O_1 һәм O_2 әйләнә үзәкләреннән орыну нокталарына O_1B һәм O_2C радиусларын үткәрик (рәс. 64). $O_1B \perp m$ һәм $O_2C \perp n$, ләкин $m \parallel n$ һәм $O_1B \parallel O_2C$. $\angle AO_1B = 2\alpha$ һәм $\angle AO_2C = 2\beta$ (орынма һәм хорда төзегән почмакларның үзлекләре). $O_1B \parallel O_2C$ булганга, $\angle AO_1B + \angle AO_2C = 180°$, ягъни $2\alpha + 2\beta = 180°$ һәм $\alpha + \beta = 90°$, ләкин $\angle AMB = \angle ACP = \beta$. Димәк, ΔBAM — турыпочмаклы һәм $\angle BAC$ — туры.

13. 65 нче рәсемдә *CAB* һәм *DAB* почмаклары орынма һәм хорда белән төзелгән. Шуңа күрә $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AnB$ һәм $\angle DAB = \frac{1}{2} \cup AmB$. $\angle ACB$ һәм $\angle ADB$ камалган булганга, $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$ һәм $\angle ADB = \frac{1}{2} \cup AnB$. Моннан $\angle ACB = \angle DAB$ һәм $\angle CAB = \angle ADB$ була. Димәк, $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ һәм $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} = \frac{BC}{AB}$.

Бу тигезлекләрдән $AC \cdot DB = AB \cdot DA$ һәм $AD \cdot BC = AB \cdot AC$.

Беренче тигезлекнең ике өлешендә AC га, икенчесенекен AD га тапкырлыйк. Ул чакта $AC^2 \cdot DB = AB \cdot DA \cdot AC$ һәм $AD^2 \cdot BC = AB \cdot AC \cdot DA$.

Соңгы ике тигезлектән $AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC$ була.

14. 66 нчы рәсемдә үзәкләре O_1 һәм O_2 нокталарында булган әйләнәләр m турысына A һәм B нокталарында орыналар; $O_1A \perp m$ һәм $O_2B \perp m$. Димәк, $O_1A \parallel O_2B$. $\angle AO_1M = \alpha$ булсын. Ул чакта $\angle BO_2M = 180° - \alpha$. AO_1M һәм BO_2M өчпочмаклары тигезьянлы һәм $\angle AMO_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$, ә $\angle BMO_2 = \frac{\alpha}{2}$. $\angle AMB = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 90°$. Шулай булгач, M ноктасы AB диаметрлы әйләнәнеке.

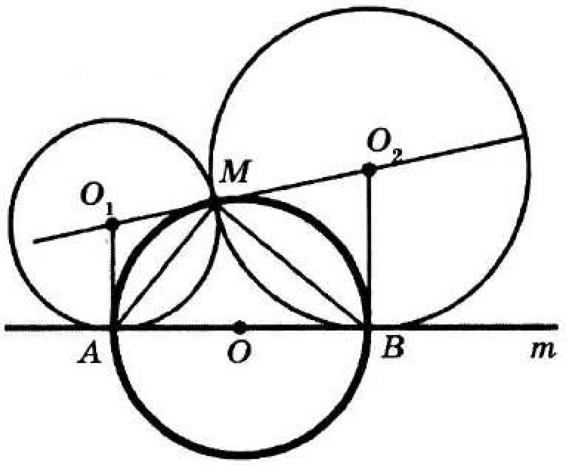
Җавап. AB диаметрлы әйләнә.

15. Әйләнә радиусы R га тигез булсын ди (рәс. 67). $(AB + AC) \cdot (AB + BC) = AB^2 + AC \cdot AB + AB \cdot BC + AC \cdot BC = AB(AB + AC + BC) + AC \cdot BC$; $AC + BC + AB = MC - MA + CN - BN + AB = 2R - AK - BK + AB = 2R$. $MA = AK$ һәм $BN = BK$ булуын кулландык. Ул вакытта $(AB + AC)(AB + BC) = AB \cdot 2R + AC \cdot BC$.

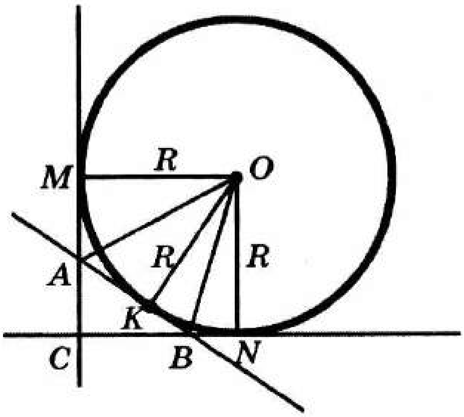
OMCN квадратының мәйданы R^2. Ул *AOB*, *ONB*, *OMA* һәм *ABC* өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез:

$$\frac{1}{2}AB \cdot R + \frac{1}{2}R(R - BC) + \frac{1}{2}(R - AC) + \frac{AC \cdot BC}{2} = R^2.$$

Моннан $AC \cdot BC = R\,(BC + AC - AB)$.



Рәс. 66



Рәс. 67

Бу очракта $(AB + AC)(AB + BC) = 2AB \cdot R + R(BC + AC - AB) = R(2AB + BC + AC - AB) = R(AB + AC + BC) = 2R^2$ һәм K ноктасының торышына бәйсез була.

16. Әйләнә үзәкләре O_1 һәм O_2, ә аларның орыну ноктасы K булсын ди. O_1, K һәм O_2 нокталары бер туры өстендә яталар һәм $O_1O_2 = R_1 + R_2$ — трапециянең урта сызыгы, ул чакта $AD + BC = 2R_1 + 2R_2$; $AB = 2R_1$ һәм $CD = 2R_2$. Алай булгач, $AD + BC = AB + CD$ һәм трапеция эченә әйләнә камарга була.

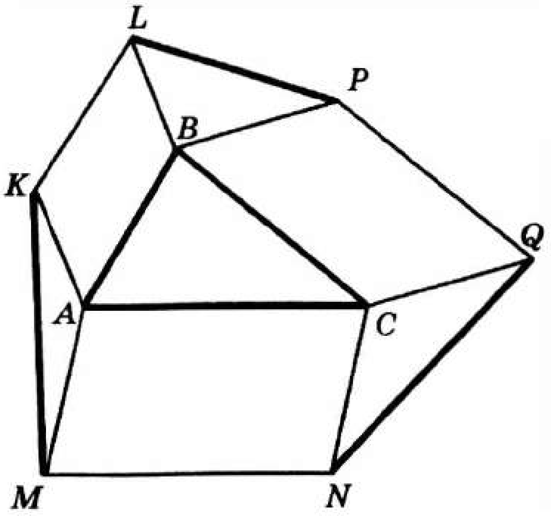
17. BDC өчпочмагын тикшерик: $\angle DBC = 20°$, $\angle C = 40°$. Ул чакта $\angle BDC = 120°$ һәм $BC > BD$. BC ягында BD га тигез булган BE кисемтәсен салабыз. $EC = AD$ икәнен исбатлыйк. DBE өчпочмагында $BD = BE$ һәм $\angle BDE = \angle BED = 80°$. Ул чакта $\angle EDC = 120° - 80° = 40° = \angle DCE$. Моннан $EC = DE$; $\angle ADE = 180° - 40° = 140°$, ә $\angle ABE = 40°$ булганга, $\angle ADE + \angle ABE = 180°$. Ә бу $ABED$ дүртпочмагын әйләнә белән камарга була дигән сүз; бер үк дугага таянучы камалган почмаклар булганга, $\angle AED = \angle ABD$. Ул чакта $\angle AED = 20°$. Аналогия буенча $\angle DAE = 20°$. Бу очракта ΔADE — тигезьянлы һәм $AD = DE = EC$. Шуңа күрә $BC = BE + EC = BD + AD$.

18. E һәм F — дүртпочмакның капма-каршы AB һәм CD якларының урталары булсын ди.

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{EC} + \frac{1}{2}\overline{ED} = \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{BC}) + \frac{1}{2}(\overline{EA} + \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{BC} + \overline{EA} + \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}),$$ чөнки $\overline{EB} + \overline{EA} = \vec{0}$. Шарт буенча $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

Без $|\overline{EF}| = \frac{1}{2}|\overline{BC} + \overline{AD}| = \frac{1}{2}(|\overline{BC}| + |\overline{AD}|)$ икәнен таптык. Бу $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{AD}$ булган очракта гына мөмкин, чөнки $BC \parallel AD$ һәм $ABCD$ — трапеция. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

19. $\overline{LP}$, $\overline{QN}$ һәм $\overline{MK}$ векторлары суммасын карыйк (рәс. 68): $\overline{LP} + \overline{QN} + \overline{MK} = \overline{BP} - \overline{BL} + \overline{CN} - \overline{CQ} + \overline{AK} - \overline{AM}$. Шарттан $\overline{BP} = \overline{CQ}$, $\overline{AK} = \overline{BL}$ һәм $\overline{AM} = \overline{CN}$ була. Бу очракта $\overline{LP} + \overline{QN} + \overline{MK} = \vec{0}$. Моның белән KM, LP һәм QN кисемтәләреннән өчпочмак төзеп булуы исбатлана.



Рәс. 68

20. ABC өчпочмагының AE, BF һәм CD биссектрисалары O ноктасында кисешсен һәм $\frac{AO}{OE} = \frac{BO}{OF} = \frac{CO}{OD} = \frac{m}{n}$ булсын ди. Ул чакта

$$\overline{AO} = \frac{m}{m+n}\overline{AF} + \frac{n}{m+n}\overline{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overline{AC} + \frac{n}{m+n}\overline{AB}. \qquad (1)$$

Икенче яктан,

$$\overline{AO} = \frac{m}{m+n}\overline{AD} + \frac{n}{m+n}\overline{AC} = \frac{m}{2(m+n)}\overline{AB} + \frac{n}{m+n}\overline{AC}. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) тигезлекләреннән

$$2\overline{AO} = \frac{m+2n}{2(m+n)}\overline{AB} + \frac{m+2n}{2(m+n)}\overline{AC} \text{ һәм}$$

$$\overline{AO} = \frac{m+2n}{4(m+n)}\overline{AB} + \frac{m+2n}{4(m+n)}\overline{AC}$$

була. $\frac{m+2n}{4(m+n)} = k$ булсын ди. Ул чакта $\overline{AO} = k\overline{AB} + k\overline{AC}$. Аналогия буенча $\overline{CO} = k\overline{CA} + k\overline{CB}$ һәм $\overline{BO} = k\overline{BA} + k\overline{BE}$. $\overline{AO} + \overline{CO} + \overline{BO} = k\cdot(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CA} + \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{BC}) = \vec{0}$, яки $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$, ягъни O — өчпочмакларның медианалары кисешү ноктасы, ул биссектрисалар кисешү ноктасы белән тәңгәл килә. Моннан ABC өчпочмагының тигезьяклы икәнлеге килеп чыга.

Учебное издание

Зив Борис Германович
Мейлер Вениамин Михайлович

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 8 класса татарской
средней общеобразовательной школы

(перевод с русского на татарский язык)

Редакция мөдире *Л. Х. Мөхәммәтҗанова*
Редакторы *Л. Р. Газимова*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы һәм компьютерда
биткә салучысы *Р. М. Галимова*
Корректорлары *Г. Г. Мөхәммәтҗанова, Г. Р. Сафиуллина*

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 05.12.2003.
Форматы 60×90 $^1/_{16}$. Офсет кәгазе. Гарнитура «Школьная».
Басма табагы 9,0. Нәшер-хисап табагы 7,15.
Тиражы 8000 д. Заказ С-279.

«Мәгариф» нәшрияты. 420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Издательство «Магариф». 420111. Казань, ул. Баумана, 19.
Тел./факс (8432) 92-57-48.
http://magarif. kazan. ru.
E-mail: magarif@mail. ru

ДУП «Полиграфия-нәшрият комбинаты».
420111. Казан, Бауман урамы, 19.